

Lösung

Aufgabe 3 (Ohne GTR!)

Eine Ebene sei gegeben durch die drei Punkte A(0/0/1), B(1/2/4) und C(4/5/7).
Gib die Parametergleichung der Ebene und einen Normalenvektor an!

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{I} \quad a + 2b = -3c \quad | \cdot -4$$

$$\text{II} \quad \underline{4a + 5b = -6c}$$

$$-3b = 6c \rightarrow b = -2c \text{ in „I“ einsetzen}$$

$$a + 2 \cdot (-2c) = -3c$$

$$a = c$$

Damit ist für jedes c mit $c \neq 0$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} c \\ -2c \\ c \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene.

Aufgabe 4 (mit GTR!)

Eine Ebene sei gegeben durch die drei Punkte A(2/0/1), B(4/3/1) und C(2/4/8).
Gib die Parametergleichung der Ebene und einen Normalenvektor an!

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{MATRIX[A]} \quad 2 \times 4$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix} =$$

und

$$\text{rref(A)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2,625 & 0 \\ 0 & 1 & 1,75 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ans} \rightarrow \text{Frac}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -21/8 & 0 \\ 0 & 1 & 7/4 & 0 \end{bmatrix}$$

Das bedeutet: $\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{21}{8}c \\ 8c \\ -\frac{7}{4}c \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{8}c \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ -14 \\ 8 \end{pmatrix}$ ist für jedes c mit $c \neq 0$ ein Normalenvektor.

Z.B.: Mit (sinnvollerweise gewähltem) $c = 8$ ergibt sich $\vec{n} = \begin{pmatrix} 21 \\ -14 \\ 8 \end{pmatrix}$ als eine Möglichkeit.