Martin Wellmann

Thema: Normalenvektor

Definition:
Ein Vektor, der senkrecht auf einer Ebene steht, heißt Normalenvektor der Ebene.

Satz 1:
Der Normalenvektor einer Ebene steht senkrecht auf jedem Richtungsvektor der Ebene.

Satz 2:
Steht ein Vektor senkrecht auf zwei linear unabhängigen Richtungsvektoren einer Ebene, dann ist er Normalenvektor der Ebene.

Satz 3:
Zwei parallele Ebenen haben linearabhängige (parallele) Normalenvektoren.
D.h.: Der Normalenvektor einer Ebene gibt ihre Richtung eindeutig an!

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Bestimme einen Normalenvektor!

Es sei: $\vec{n^*} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ Gleichung I $2a + b + 6c = 0$

und $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ Gleichung II $-4a + 2b + c = 0$

Zwei Gleichungen, drei Variablen!!
Man nimmt z.B. c als Parameter, d.h. man behandelt c wie eine Zahl:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & 2a + b & = -6c \quad |\cdot 2 \\ \underline{\text{II}} & \underline{-4a+2b} & \underline{= -c} \\ & 4b & = -13c \\ & b & = -\frac{13}{4}c \end{array}$$
und damit ergibt sich nach weiterer Rechnung
$$a = -\frac{11}{8}c$$

$$\vec{n^*} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{8}c \\ -\frac{13}{4}c \\ c \end{pmatrix} = \frac{c}{8}\begin{pmatrix} -11 \\ -26 \\ 8 \end{pmatrix}$$ wäre damit ein Richtungsvektor $\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} -11 \\ -26 \\ 8 \end{pmatrix}$ auch.

Wichtig c darf nicht 0 sein!! Woher weiß man das?

Aufgabe 2:

Gegeben ist E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ Bestimme einen Normalenvektor!

Es sei: $\vec{n^*} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ Gleichung I -2a + b + 3c = 0

und $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ Gleichung II 4a -2b + 5c = 0

Bemerkung:
Hier wird für c = 0 herauskommen, was man normalerweise vorher ja nicht weiß!

I	-2a + b	= -3c	|·2
II	4a -2b	= - 5c	
	0	= -11c → c = 0. Jetzt weiß man es ☺ und **kann es verwenden**!	

I	-2a + b	= 0	|·2
II	4a -2b	= 0	
	0	= 0,	wahre Aussage, Gleichung I und II sind linear abhängig, man hat eigentlich nur eine Gleichung mit der Lösung:
	b	= 2a	

$\Rightarrow \vec{n^*} = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist also Normalenvektor und damit auch $\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Was wäre passiert, wenn man zufällig b als Parameter genommen hätte?
Dann hätte es gar keine Probleme gegeben:

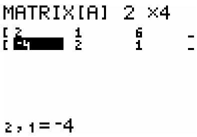
I	-2a + 3c	= -b	|·2
II	4a +5c	= 2b	
	11c	= 0	
	c	= 0 in I einsetzen	
	-2a	= -b	
	a	$= \frac{1}{2}b$	

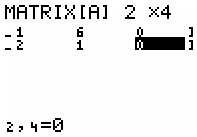
$\Rightarrow \vec{n^*} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist also Normalenvektor und damit auch $\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

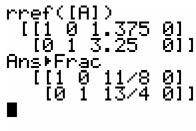
Und was sagt der GTR ? ☺

Zu Aufgabe 1:

I $\quad 2a + b + 6c = 0$ und
II $\quad -4a + 2b + c = 0$ ergeben eine 2 x 4 Matrix → Im GTR eingeben.



bzw.


Mit der Lösung:


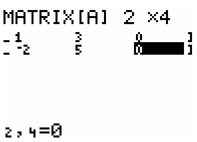
Wie ist das zu lesen:

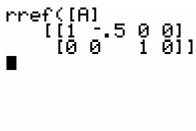
Erste Zeile: $\quad 1a + \frac{11}{8}c = 0 \Rightarrow a = -\frac{11}{8}c$

Zweite Zeile: $\quad 1b + \frac{13}{4}c = 0 \Rightarrow a = -\frac{13}{4}c$ (Wie oben von Hand ☺)

Zu Aufgabe 2:

I $\quad -2a + b + 3c = 0$ und
II $\quad 4a - 2b + 5c = 0$ ergeben auch hier eine 2 x 4 Matrix → Im GTR eingeben.



Mit der Lösung


Wie ist das hier zu lesen:

Die zweite Zeile bedeutet: $c = 0$. Das ist klar.
Die erste bedeutet: $1a - 0{,}5b = 0$ Also: $a = 0{,}5b$ (Wie oben von Hand ☺)

Und jetzt zur Übung:

Aufgabe 3 (Ohne GTR!)

Eine Ebene sei gegeben durch die drei Punkte A(0/0/1), B(1/2/4) und C(4/5/7).
Gib die Parametergleichung der Ebene und einen Normalenvektor an!

Aufgabe 4 (mit GTR!)

Eine Ebene sei gegeben durch die drei Punkte A(2/0/1), B(4/3/1) und C(2/4/8).
Gib die Parametergleichung der Ebene und einen Normalenvektor an!