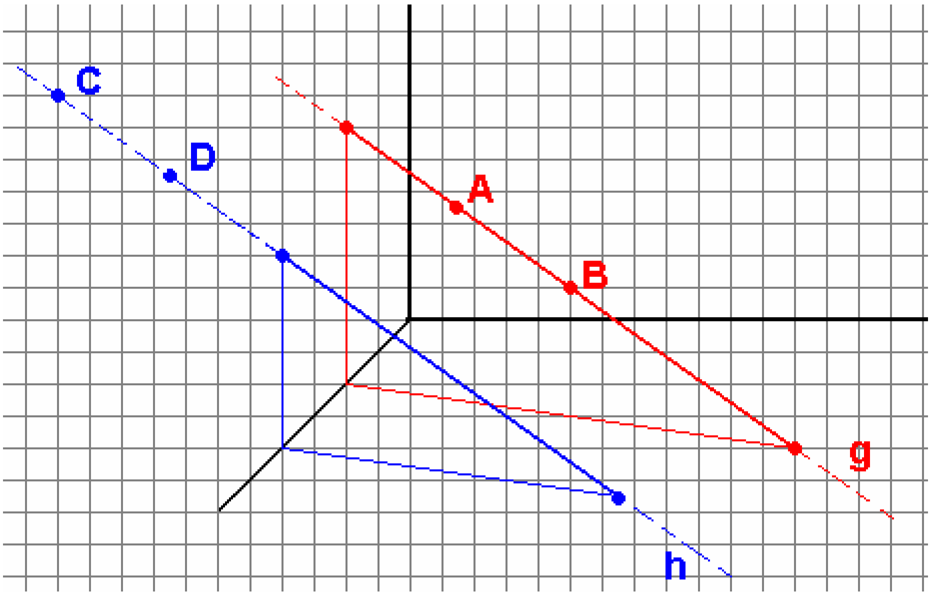
Lösung zu Aufgabe 2010-04-25-1 Seite 1

Zeichnung zu den Aufgabenteilen a), g) und h)



zu b und c) $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{6{,}25+4+9} = \sqrt{19{,}25}\text{LE}$; $\left|\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{29}\text{LE}$

zu d und e) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-2{,}5 \\ 4-2 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{0{,}25+4+1} = \sqrt{5{,}25}\text{LE}$; $\overline{CB} = \sqrt{73}\text{LE}$

zu f) $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

zu g) Um die Geraden einzeichnen zu können, braucht man die Durchstoßpunkte (oder auch Spurpunkte oder Schnittpunkte) mit den Koordinatenebenen:

$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$k = -5 \Rightarrow G_{2,3} = (0/-8/8)$

$k = -1 \Rightarrow G_{1,3} = (2/0/4)$

$k = 3 \Rightarrow G_{1,2} = (4/8/0)$

$h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$l = -6 \Rightarrow H_{2,3} = (0/-16/11)$

$l = 2 \Rightarrow H_{1,3} = (4/0/3)$

$l = 5 \Rightarrow H_{1,2} = (5{,}5/6/0)$

zu h) $g'\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad h'\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

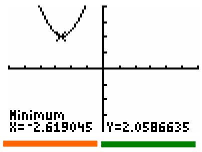
zu i) Vermutung: g und h sind parallel zueinander.
Nachweis: Die Richtungsvektoren sind identisch und damit erst recht linear abhängig. Damit kommen die Fälle parallel und identisch in Frage.
Wenn man C(3/-4/5) in g einsetzt erhält man:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} k = 1 \\ k = -3 \\ 1 \neq -3 \Rightarrow C \notin g \Rightarrow g \neq h \end{array}$$

zu j) Abstand von C(3/-4/5) zu g:
Lösungsweg 1: Der Abstand von C zu $L \in g$, muss minimal sein.
$L \in g$, wenn gilt: L(2,5+0,5k / 2+2k / 3-k)

$$\left|\overrightarrow{CL}\right| = \sqrt{(2,5+0,5k-3)^2 + (2+2k+4)^2 + (3-k-5)^2}$$ → Minimum mit GTR

```
 Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=√((-.5+.5X)²
+(6+2X)²+(-2-X)²
)
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
```



k = -2,62. Der Abstand beträgt 2,06 LE.

Lösungsweg 2: $\overrightarrow{CL}$ muss senkrecht auf dem Richtungsvektor von g stehen:

$$\begin{pmatrix} 2,5+0,5k-3 \\ 2+2k+4 \\ 3-k-5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -0,25+0,25k+12+4k+2+k = 13,75+5,25k = 0$$

```
13.75/(-5.25)
       -2.619047619
Ans▸Frac
             -55/21
Ans→K
       -2.619047619
```

→ K in g einsetzen → L(A/B/C)→

```
            1.19047619
Ans→A
            1.19047619
2+2K→B
           -3.238095238
3-K→C
           5.619047619
```

Jetzt Abstand CL ausrechnen→

```
2+2K→B
       -3.238095238
3-K→C
        5.619047619
√((A-3)²+(B+4)²+
(C-5)²)
        2.058663459
```

Man sieht, dass Lösungsweg 2 die gleichen Ergebnisse liefert.
Bei solch „krummen“ Zahlen und bei Zulassung des GTR scheint Lösungsweg 1 einfacher zu sein.
Ohne GTR und dann hoffentlich mit einem „schönen“ Parameter scheint Lösungsweg 2 einfacher zu sein.

zu k) Da g und h parallel sind, haben sie überall den gleichen Abstand voneinander.
Damit ist die Lösung von Aufgabe j) auch die Lösung von Aufgabe k)