S. 96 | 3b, 4, 5a : LÖSUNGEN

3

b $f(x) = x^3$; $g(x) = x$; $a = 0$; $b = 1$

(1) Schnittstellen von f & g : $f(x) = g(x)$

$x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) \Rightarrow x_1 = 0,\ x_{2/3} = \pm 1 \quad \Rightarrow I = [0,1]$

d.h. f & g haben keine weiteren Schnittstellen auf $[0;1]$

(2) $f(x) \geq g(x)$ o. $g(x) \geq f(x)$ auf $[0;1]$?:

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} < g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow g(x) \geq f(x)$ auf I

(3) $\int_0^1 (g(x) - f(x))dx = \int_0^1 (-x^3 + x)dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

4

a $f(x) = x^2$; $g(x) = -x^2 + 4x$

(1) Schnittstellen von f & g : $f(x) = g(x)$

$x^2 = -x^2 + 4x \Leftrightarrow -2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow -2x(x-2) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2$

(2) $f(x) \geq g(x)$ o. $g(x) \geq f(x)$ auf $[0;2]$?: $\quad \Rightarrow I = [0;2]$

$f(1) = 1 < g(1) = 3 \quad \Rightarrow g(x) \geq f(x)$ auf I

(3) $\int_0^2 (g(x) - f(x))\,dx = \int_0^2 (-2x^2 + 4x)dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2 = \frac{8}{3}$

---

b $f(x) = x^2$; $g(x) = -x^3 + 3x^2$

(1) Schnittstellen von f & g : $f(x) = g(x)$

$x^2 = -x^3 + 3x^2 \Leftrightarrow -x^3 + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(2-x) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2$

(2) $f(x) \geq g(x)$ o. $g(x) \geq f(x)$ auf $[0;2]$? : $\quad \Rightarrow I = [0;2]$

$f(1) = 1 < g(1) = 2 \quad \Rightarrow g(x) \geq f(x)$ auf I

(3) $\int_0^2 (g(x) - f(x))dx = \int_0^2 (-x^3 + 2x^2)dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{4}{3}$

4

c) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$; $g(x) = 2{,}5x - 5{,}25$

(1) Schnittstellen von f & g : f(x) = g(x)

$-\frac{1}{x^2} = 2{,}5x - 5{,}25 \overset{|\cdot x^2}{\Leftrightarrow} -1 = 2{,}5x^3 - 5{,}25x^2 \Leftrightarrow 2{,}5x^3 - 5{,}25x^2 + 1 = 0$

Polynomdivision : $x = 2$ (durch Ausprobieren)

$(2{,}5x^3 - 5{,}25x^2 + 1) = (x-2) \cdot \underbrace{(2{,}5x^2 - 0{,}25x - 0{,}5)}_{|:2{,}5}$

$-(2{,}5x^3 - 5x^2)$

$-0{,}25x^2 + 1$

$-(-0{,}25x^2 + 0{,}5x)$

$-0{,}5x + 1$

$-(-0{,}5x + 1)$

0

p-q-Formel

$x^2 - \frac{1}{10}x - \frac{1}{5} = 0$

$x_{1/2} = \frac{1}{20} \pm \sqrt{\frac{1}{400} + \frac{1}{5}} = \frac{1}{20} \pm \sqrt{\frac{81}{400}}$

$= \frac{1}{20} \pm \frac{9}{20} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \quad (x_3 = -\frac{2}{5})$

$\Rightarrow I = [\frac{1}{2}; 2]$

(2) $f(x) \geq g(x)$ o. $g(x) \geq f(x)$ auf $[\frac{1}{2}; 2]$? :

$f(1) = -1 > g(1) = -2{,}75 \Rightarrow f(x) \geq g(x)$ auf I

(3) $\int_{1/2}^{2} (f(x) - g(x))dx = \int_{1/2}^{2} (-\frac{1}{x^2} - 2{,}5x + 5{,}25)dx = [\frac{1}{x} - \frac{5}{4}x^2 + \frac{21}{4}x]_{1/2}^{2}$

$= 6 - \frac{69}{16} = \frac{27}{16}$

---

d) $f(x) = x^3 - x$; $g(x) = -x^3 + x^2$

(1) Schnittstellen von f & g : f(x) = g(x)

$x^3 - x = -x^3 + x^2 \Leftrightarrow -2x^3 + x^2 + x = 0$

Polynomdivision : $x = 1$ (⇐ durch Ausprobieren)

$(-2x^3 + x^2 + x) = (x-1)\underbrace{(-2x^2 - x)}_{\text{Ausklammern}}$

$-(-2x^3 + 2x^2)$

$-x^2 + x$

$-(-x^2 + x)$

0

$-x(2x+1) \Rightarrow x_2 = 0, x_3 = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow I_1 = [-\frac{1}{2}; 0]$; $I_2 = [0, 1]$

(2) $f(x) \overset{\leq}{\geq} g(x)$ auf I_1 ? :

$f(-\frac{1}{4}) = \frac{15}{64} > g(-\frac{1}{4}) = \frac{5}{64}$

$\Rightarrow f(x) \geq g(x)$ auf I_1

$f(x) \overset{\leq}{\geq} g(x)$ auf I_2 ? :

$f(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{8} < g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow g(x) \geq f(x)$ auf I_2

(c) Fortsetzung

(3) $\int_{-1/2}^{0}(f(x)-g(x))dx + \int_{0}^{1}(g(x)-f(x))dx = \int_{-1/2}^{0}(2x^3-x^2-x)dx + \int_{0}^{1}(-2x^3+x^2+x)dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1/2}^{0} + \left[-\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$

$= \frac{5}{96} + \frac{1}{3} = \underline{\frac{37}{96}}$

---

(5)

(a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$; $P(3|4,5)$

$f'(x) = x \Rightarrow f'(3) = 3 \quad t(x) = mx + c \quad (*)$

$\Rightarrow 4,5 = 3x + c \quad P \text{ in } (*) : 4,5 = 3 \cdot 3 + c$

$c = -4,5$, dh. $\underline{t(x) = 3x - 4,5}$

(1) Schnittstellen mit x-Achse:

$f(x) = 0 : \frac{1}{2}x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$t(x) = 0 : 3x - 4,5 = 0 \Leftrightarrow 3x = 4,5 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Schnittstelle von f und t gegeben durch $P(\underline{\underline{3}}|4,5)$

(2) $f(x) \overset{?}{\geq} t(x)$ auf $[0;3]$?:

$f(1) = \frac{1}{2} > t(1) = -1,5 \Rightarrow \underline{f(x) \geq t(x) \text{ auf } I}$

(3) $\int_{0}^{3}\left(\frac{1}{2}x^2\right)dx - \int_{1,5}^{3}(3x-4,5)dx = \left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^3 - \left[\frac{3}{2}x^2 - 4,5x\right]_{1,5}^{3}$

$= 4,5 - \left(0 - \left(-\frac{27}{8}\right)\right) = 4,5 - \frac{27}{8} = \underline{\frac{9}{8}}$

oder $4,5 - A(\triangle) = 4,5 - \left(\frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 4,5\right) = 4,5 - \frac{27}{8} = \underline{\frac{9}{8}}$