Lösung von Aufgabe 7

Martin Wellmann

Zusammenhang zwischen Fläche und Stammfunktion

$f(x) = \sqrt{x}$ mit $0 \leq x \leq 1$.

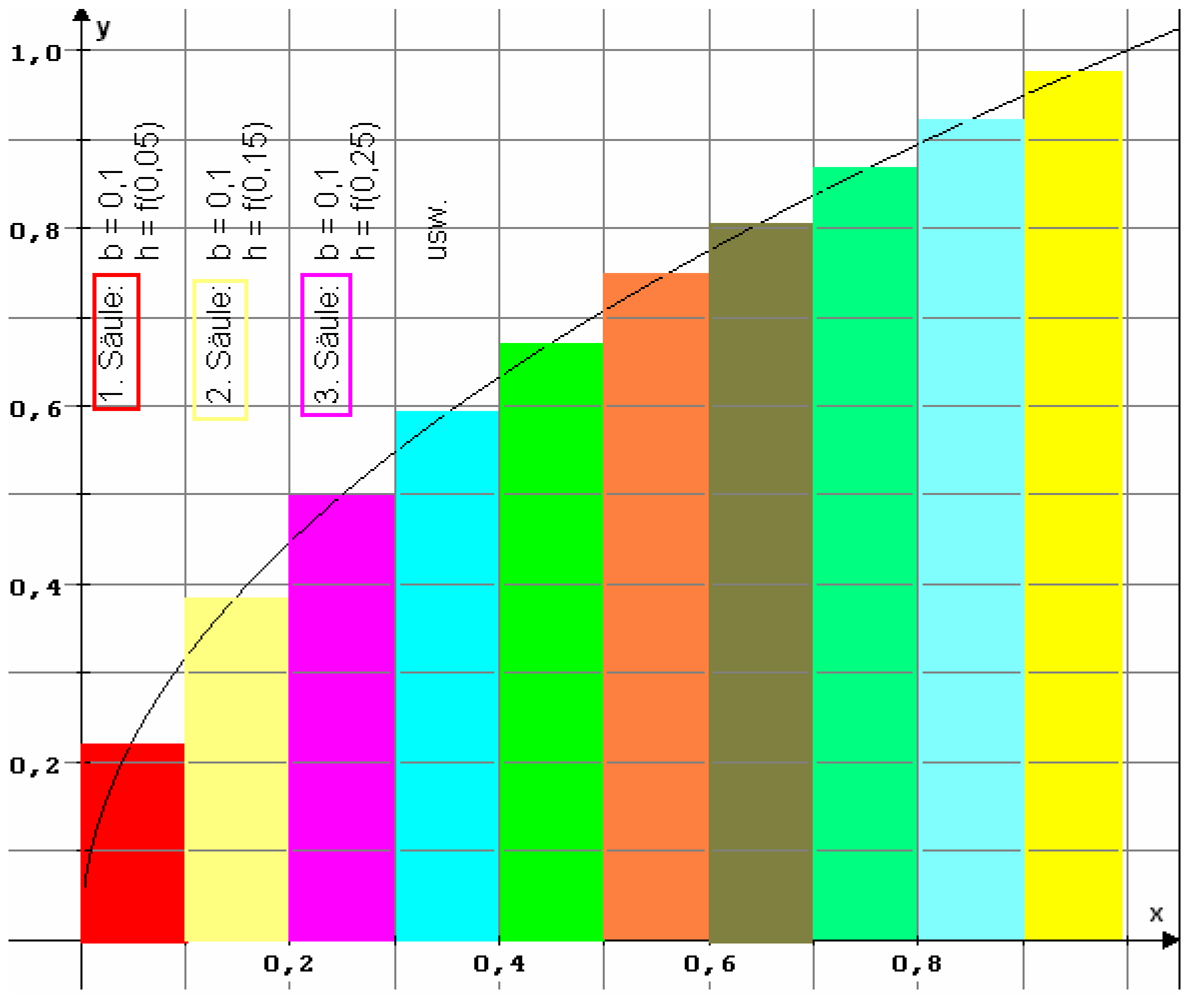
$F(x) = \int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ (wenn wir c = 0 setzen.) **$F(1) = \frac{2}{3} \approx 0{,}67$ FE**

a) Schaubild möglichst genau auf mm - Papier und Kästchen gezählt:
→ Z.B.: 66 Kästchen gezählt → 66 mm² = 0,66 cm² = 0,66 FE ≈ 0,67 FE

b) Die Breite der Säulen ist 1 mm = 0,1 LE.
Die Mitte des ersten Kästchens ist 0,5 mm = 0,05 LE
Die Höhe der ersten Säule ist f(0,05) = $\sqrt{0{,}05}$ = 0,2236 LE
Damit beträgt der Flächeninhalt der ersten Säule 0,02236 FE
F(0,1) = 0,021... ≈ 0,02236

Die Mitte des zweiten Kästchens ist 1,5 mm = 0,15 LE
Die Höhe der zweiten Säule ist f(0,15) = $\sqrt{0{,}15}$ = 0,3873 LE
Damit beträgt der Flächeninhalt der ersten beiden Säulen:
0,02236 + 0,03873 = 0,0611 FE ≈ 0,06 FE
F(0,2) = 0,0596...FE ≈ 0,06 FE

Das Bild ist stark vergrößert: 1 Kästchen entspricht 1 mm!

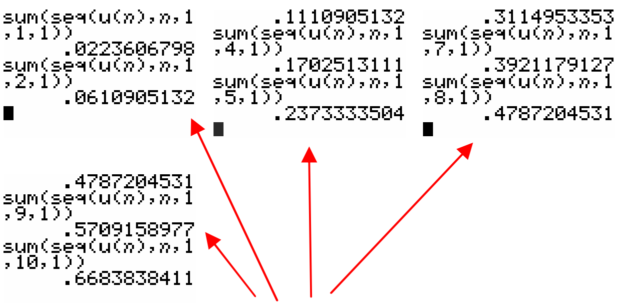


Weiter auf Seite 2

Die nebenstehende EXCEL - Tabelle zeigt den Vergleich der ausgezählten bzw. berechneten Flächeninhalte der Rechtecke mit den Funktionswerten der Stammfunktion.

Jetzt soll noch gezeigt werden, wie man das mit dem GTR machen kann:

- $a_n = 0{,}1n - 0{,}05$ liefert die Intervallmitten 0,05; 0,15; 0,25; ... ; 0,95
- $b_n = \sqrt{a_n} = \sqrt{0{,}1n - 0{,}05}$ liefert die Höhen
- $\boxed{u_n} = 0{,}1 \cdot b_n = \boxed{0{,}1 \cdot \sqrt{0{,}1n - 0{,}05}}$ liefert die Flächeninhalte der Rechtecke.



sum(seq(u(n),n,1,**e**,1)) liefert die gleichen Ergebnisse wie die EXCEL - Tabelle rechts in der vorletzten Zeile. Dabei ist e = 10·b. In der letzten Zeile stehen die Funktionswerte der Stammfunktion F(**b**).

Damit haben wir jetzt an vier Beispielen näherungsweise gezeigt: Liegt das Schaubild einer Funktion f(x) im ersten Quadranten und geht durch den Ursprung, dann ist der Wert des Flächeninhaltes der Fläche, die von der x - Achse, dem Schaubild und der senkrechten Geraden x = b eingeschlossen wird gleich dem Funktionswert F(b) der zu f(x) gehörigen Stammfunktion F(x) mit c = 0.

Säule Nr.	Breite in LE	x - Wert Intervallmitte	Höhe y=f(x)	Fläche A=x*y	b = 0,1	b = 0,2	b = 0,3	b = 0,4	b = 0,5	b = 0,6	b = 0,7	b = 0,8	b = 0,9	b = 1
1	0,1	0,05	0,2236	0,02236	0,02236	0,02236	0,02236	0,02236	0,02236	0,02236	0,02236	0,02236	0,02236	0,02236
2	0,1	0,15	0,3873	0,03873		0,03873	0,03873	0,03873	0,03873	0,03873	0,03873	0,03873	0,03873	0,03873
3	0,1	0,25	0,5000	0,05000			0,05000	0,05000	0,05000	0,05000	0,05000	0,05000	0,05000	0,05000
4	0,1	0,35	0,5916	0,05916				0,05916	0,05916	0,05916	0,05916	0,05916	0,05916	0,05916
5	0,1	0,45	0,6708	0,06708					0,06708	0,06708	0,06708	0,06708	0,06708	0,06708
6	0,1	0,55	0,7416	0,07416						0,07416	0,07416	0,07416	0,07416	0,07416
7	0,1	0,65	0,8062	0,08062							0,08062	0,08062	0,08062	0,08062
8	0,1	0,75	0,8660	0,08660								0,08660	0,08660	0,08660
9	0,1	0,85	0,9220	0,09220									0,09220	0,09220
10	0,1	0,95	0,9747	0,09747										0,09747
Summe der Flächeninhalte der Säulen:					0,02236	0,06109	0,11109	0,17025	0,23733	0,31150	0,39212	0,47872	0,57092	0,66838
Funktionswert der Stammfunktion F(b):					0,0211	0,0596	0,1095	0,1687	0,2357	0,3098	0,3904	0,477	0,5692	0,6667