11.11.2009

Martin Wellmann

Lösungen zu den

Übungen zum Beweisverfahren der vollständigen Induktion:

Aufgabe 1: Beweise: Für alle natürlichen Zahlen n mit n > 0 gilt:

$12 + 17 + 22 + ... + (5n + 7) = \frac{n}{2}(5n+19)$

IA: n = 1 $12 = \frac{1}{2}(5 \cdot 1 + 19)$; w. A.

IS - IVor.: n = k: $12 + 17 + 22 + ... + (5k + 7) = \frac{k}{2}(5k+19)$

IS - IBeh.: n = k+1: $12 + 17 + ... + (5k + 7) + (5k + 12) = \frac{k+1}{2}(5k+24)$

IS - IBew.: z. z.: H(k) $\Rightarrow$ H(k+1)

l. S.: $12 + 17 + ... + (5k + 7) + (5k + 12) = \frac{k}{2}(5k+19) + (5k + 12) = \frac{5}{2}k^2 + \frac{29}{2}k + 12$

r. S.: $\frac{k+1}{2}(5k+24) = \frac{5}{2}k^2 + \frac{5}{2}k + \frac{24}{2}k + 12 = \frac{5}{2}k^2 + \frac{29}{2}k + 12$

Damit ist die Aussage bewiesen!

Aufgabe 2: Beweise: Für alle natürlichen Zahlen n mit n > 0 gilt:

$2|(3^n - 1) \rightarrow$ H(n): $3^n - 1 = 2 \cdot z$, wobei z natürliche Zahl ist

IA: n = 1: $3^n - 1 = 3 - 1 = 2 = 2 \cdot 1$; 1 ist natürliche Zahl → w. A.

IS - IVor.: n = k: H(k): $3^k - 1 = 2 \cdot t$, wobei t natürliche Zahl ist.

IS - IBeh.: n = k+1: H(k): $3^{k+1} - 1 = 2 \cdot q$, wobei q natürliche Zahl ist.

IS - IBew.: z. z.: H(k) $\Rightarrow$ H(k+1)

$3^{k+1} - 1 = 3 \cdot 3^k - 1 = (2+1) \cdot 3^k - 1 = 2 \cdot 3^k + 3^k - 1 = 2 \cdot 3^k + 2 \cdot t = 2 \cdot (3^k + t)$

Da nach Voraussetzung k und t natürliche Zahlen sind, ist auch $3^k + t$ eine natürliche Zahl. Damit ist die Aussage bewiesen.