Martin Wellmann

Lösungsblatt 4 der Hausaufgaben vom 08.10.2009 zu Aufgabe 2 c) und d)

2. Aufgabe:

Gegeben ist die Zahlenfolge A_n durch $a_n = \frac{n^2}{3n^2+1}$; $n \geq 1$

a) Gib die ersten zwei Glieder auf drei Dezimalen genau an! (Ohne GTR!!)
b) Stelle eine Vermutung für das Monotonieverhalten, und die größte untere Schranke auf (Mit GTR!!) und beweise diese!
c) Jemand behauptet, dass 0,3 eine obere Schranke sei. Für wieviel Zahlenfolgenglieder gilt diese Vermutung?
d) Beweise rechnerisch, dass $S = \frac{1}{3}$ die kleinste obere Schranke ist!
e) Schließe aus den Ergebnissen von b) und d) auf den Grenzwert von (a_n)!
f) Berechne mit Hilfe der Grenzwertsätze den Grenzwert von A_n! Die verwendeten Grenzwertsätze sind im Wortlaut anzugeben!

---

zu c) Annahme: $\frac{n^2}{3n^2+1} \leq 0{,}3$

$n^2 \leq 0{,}3 \cdot (3n^2+1) \Leftrightarrow$

$0{,}1n^2 \leq 0{,}3 \Leftrightarrow$

$n^2 \leq 3 \Leftrightarrow$

$|n| \leq 1{,}73$

Wahre Aussage nur für $n \leq 1$, also nur für ein ZF - Glied.

Zweiter Weg zu c): Wegen $a_2 = 0{,}308$ und $\{a_n\}$ str. mon. wachsend folgt, dass nur $a_1 = 0{,}25$ die Zahl 0,3 nicht übersteigt.

---

zu d) Annahme: $\frac{n^2}{3n^2+1} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

Beweis, dass 1/3 obere Schranke ist.

$n^2 \leq n^2 + \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$0 \leq \frac{1}{3}$; wahre Aussage für alle n

Annahme: $\frac{n^2}{3n^2+1} \leq \frac{1}{3} - \varepsilon \quad \text{mit } \varepsilon > 0 \Leftrightarrow$

Annahme, dass eine kleine Zahl als 1/3 obere Schranke ist.
→ Führt zum Widerspruch.

$n^2 \leq n^2 + \frac{1}{3} - 3n\varepsilon - \varepsilon \Leftrightarrow$

$3n\varepsilon \leq \frac{1}{3} - \varepsilon \Leftrightarrow$

$n \leq \frac{1-3\varepsilon}{9\varepsilon}$

Für jedes $\varepsilon > 0$ ist diese Aussage nur für endlich viele ZF - Glieder wahr, d.h., dass eine kleinere Zahl als $\frac{1}{3}$ nicht obere Schranke sein kann.