Lösungsblatt 3 der Hausaufgaben vom 08.10.2009

2. Aufgabe:

Gegeben ist die Zahlenfolge A_n durch $a_n = \frac{n^2}{3n^2+1};\ \ n \geq 1$

a) Gib die ersten zwei Glieder auf drei Dezimalen genau an! (Ohne GTR!!)
b) Stelle eine Vermutung für das Monotonieverhalten, und die größte untere Schranke auf (Mit GTR!!) und beweise diese!
c) Jemand behauptet, dass 0,3 eine obere Schranke sei. Für wieviel Zahlenfolgenglieder gilt diese Vermutung?
d) Beweise rechnerisch, dass $S = \frac{1}{3}$ die kleinste obere Schranke ist!
e) Schließe aus den Ergebnissen von b) und d) auf den Grenzwert von (a_n)!
f) Berechne mit Hilfe der Grenzwertsätze den Grenzwert von A_n ! Die verwendeten Grenzwertsätze sind im Wortlaut anzugeben!

zu a) $\{a_n\} = \{0{,}25;0{,}308;...\}$

zu b) Vermutungen: A_n ist streng monoton wachsend; $s = 0{,}25$;

(und nicht verlangt: $a_{1000} = 0{,}333333222 \rightarrow S = g = \frac{1}{3}$)

Zu zeigen:
$$\frac{n^2}{3n^2+1} \geq 0{,}25$$
$$n^2 \geq 0{,}25 \cdot \left(3n^2+1\right) \Leftrightarrow$$
$$0{,}25n^2 - 0{,}25 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{4}(n+1)(n-1) \geq \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 0 = 0$$
Wahre Aussage wegen $n \geq 1$

Zu zeigen:
$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)^2}{3(n+1)^2+1} - \frac{n^2}{3n^2+1} \geq 0$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)^2}{3(n+1)^2+1} - \frac{n^2}{3n^2+1} = \frac{n^2+2n+1}{3n^2+6n+4} - \frac{n^2}{3n^2+1} = \frac{\left(n^2+2n+1\right)\left(3n^2+1\right) - \left(n^2\right)\left(3n^2+6n+4\right)}{\left(3n^2+6n+4\right)\left(3n^2+1\right)}$$
$$a_{n+1} - a_n = \frac{3n^2+2n+1}{\left(3n^2+6n+4\right)\left(3n^2+1\right)} > 0\,?$$

Weil n > 0 ist, sind beide Faktoren des Nenners und der Zähler jeweils positiv und damit der Bruch insgesamt positiv, w.z.b.w.