Lösung Blatt 2 zur Übung für die Klausur

b) Gegeben ist die Zahlenfolge B_n mit $b_n = \frac{n^2-n+4}{n^2-n+1}$; $n \geq 1$

Beweise unter Anwendung der entsprechenden Definition: B_n ist streng monoton.

Wir vermuten: B_n ist streng monoton fallend, weil $b_1 = 4$; $b_2 = 2$; $b_3 = 1,4...$

Wir müssen zeigen: $b_{n+1} < b_n$ bzw. $b_{n+1} - b_n < 0$
Beweis:

$$b_{n+1} - b_n = \frac{(n+1)^2-(n+1)+4}{(n+1)^2-(n+1)+1} - \frac{n^2-n+4}{n^2-n+1} = \frac{(n^2+n+4)(n^2-n+1)-(n^2-n+4)(n^2+n+1)}{(n^2+n+1)(n^2-n+1)}$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{-6n}{(n^2+n+1)(n^2-n+1)} \left(= \frac{"-"}{"+"\cdot"+"} \right) < 0, \text{w.z.b.w.}$$

Beweise unter Anwendung der entsprechenden Definition: B_n ist konvergent.

Wir vermuten: B_n konvergiert gegen 1.

Wir müssen zeigen: $|b_n - 1| < \varepsilon$ für fast alle n.

Wegen $b_n>1$ (Zähler immer größer als der Nenner) gilt: $|b_n - 1| = b_n - 1$

Wir zeigen also, dass für fast alle n gilt: $b_n - 1 < \varepsilon$

$$b_n - 1 \frac{n^2-n+4}{n^2-n+1} - 1 = \frac{n^2-n+4}{n^2-n+1} - \frac{n^2-n+1}{n^2-n+1} = \frac{3}{n^2-n+1} = \frac{3}{(n-0{,}5)^2+0{,}75} < \varepsilon$$

$$\frac{3}{\varepsilon} < (n-0{,}5)^2 + 0{,}75 \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{\varepsilon} - 0{,}75 < (n-0{,}5)^2$$

Für hinreichend kleine ε gilt: $\frac{3}{\varepsilon} - 0{,}75 > 0$. Ebenso ist n - 0,5 > 0, weil $n \geq 1$,womit es möglich ist, die Wurzel zu ziehen. Da die Wurzelfunktion streng monoton wachsend ist, dreht sich das Relationszeichen nicht um. Es geht also weiter:

$$\frac{3}{\varepsilon} - 0{,}75 < (n-0{,}5)^2 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{3}{\varepsilon} - 0{,}75} < n - 0{,}5 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{3}{\varepsilon} - 0{,}75} + 0{,}5 < n$$

Die letzte Zeile ist wahr für fast alle n, womit bewiesen ist, dass $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$

Ein Konvergenzbeweis mit Definition in der Arbeit würde leichter sein!!!

Hier nicht verlangt, aber trotzdem wichtig:
Beweise unter Anwendung der **Grenzwertsätze** (S. 22): B_n ist konvergent.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+4}{n^2-n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot\left(1-\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\cdot\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=1$$

Begründung: $\frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge (aus dem Unterricht bekannt)

Und deshalb ist $\frac{1}{n^2}$ wegen des 2. Teilsatzes im Kasten auf S. 22 auch eine Nullfolge, weshalb Zähler und Nenner im „großen Bruch“ und damit der gesamte Bruch gegen 1 konvergieren.
(S. 22 Kasten 1. und 3. Teilsatz)