Lösung zur Übung für die Klausur

1. Aufgabe:

a) Gib die Definitionen für die Begriffe

- Monotonie → S. 16 (auswendig + verstehen!)
- Beschränktheit → S. 16 (auswendig + verstehen!)
- Grenzwert → S. 18 (auswendig + verstehen!)
- Zusätzlich: → S. 19 Satz 1 und Satz 2 (auswendig + verstehen!)
  → S. 22 Grenzwertsätze (auswendig + verstehen!)

b) Gegeben ist die Zahlenfolge B_n mit $b_n = \frac{n^2 - n + 4}{n^2 - n + 1}$; $n \geq 1$

Beweise unter Anwendung der entsprechenden Definition: B_n ist beschränkt.

Bemerkung: Wir müssen also eine untere und eine obere Schranke nachweisen!

1. Untere Schranke:

Wir vermuten: s = 0

$$b_n = \frac{n^2 - n + 4}{n^2 - n + 1} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$n^2 - n + 4 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$n^2 - n + 0{,}25 - 0{,}25 + 4 = (n - 0{,}5)^2 + 3{,}75 \geq 3{,}75 > 0, \text{w.z.b.w.}$$

Alternativ: Wir vermuten: s = 1 (Es ist bei der Arbeit nicht verlangt, zwei Lösungen anzugeben.)

$$b_n = \frac{n^2 - n + 4}{n^2 - n + 1} \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$n^2 - n + 4 \geq n^2 - n + 1 \Leftrightarrow$$

$$4 > 1; \text{w.z.b.w.}$$

Bemerkung: Der Beweis, dass 1 die größte untere Schranke ist, war hier ja nicht verlangt.

2. Obere Schranke:

Wir vermuten: S = 10

$$b_n = \frac{n^2 - n + 4}{n^2 - n + 1} \leq 10 \Leftrightarrow$$

$$n^2 - n + 4 \leq 10 \cdot (n^2 - n + 1) = 10n^2 - 10n + 10 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq 9n^2 - 9n + 6$$

$$9n^2 - 9n + 6 = 9n^2 - 9n + 2{,}25 - 2{,}25 + 6 = (3n - 1{,}5)^2 + 3{,}75 \geq 3{,}75 > 0, \text{w.z.b.w.}$$

Alternativ: Wir vermuten: S= 4 (Es ist bei der Arbeit nicht verlangt, zwei Lösungen anzugeben.)

$$b_n = \frac{n^2 - n + 4}{n^2 - n + 1} \leq 4 \Leftrightarrow n^2 - n + 4 \leq 4 \cdot (n^2 - n + 1) = 4n^2 - 4n + 4 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq 3n^2 - 3n + 3 \Leftrightarrow$$

$$3n^2 - 3n + 3 = 3 \cdot (n^2 - n + 1) = 3 \cdot \left[(n - 0{,}5)^2 + 0{,}75\right] \geq 2{,}25 > 0, \text{w.z.b.w.}$$

Bemerkung: Der Beweis, dass 4 die kleinste obere Schranke ist, war hier ja nicht verlangt.