Aufgabe 8) Führe für folgende Funktion eine vollständige Kurvendiskussion durch!

Die Gleichung der Funktion lautet: $f(x) = x^3 – 6x^2 + 9x$

1) Definitionsbereich:
* Wir dürfen mit beliebigen reellen Zahlen Summen und Produkte bilden. Wurzeln, Brüche und andere Ausdrücke mit beschränktem Definitionsbereich kommen in der Gleichung nicht vor. Der Definitionsbereich sind also die kompletten reellen Zahlen.

2a) Schnittpunkt mit der y-Achse:
* Es gilt folgende Bedingung: $x = 0$. Der Schnittpunkt lautet also $S_y(0/f(0)) = S_y(0/0)$.

2b) Schnittpunkte mit der x-Achse:
* Es gilt folgende Bedingung: $f(x) = 0$.
* $f(x) = x^3 – 6x^2 + 9x = x (x^2 – 6x + 9)$ // Ausklammern des Faktors x
* Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist, und sonst nicht.
* Der erste Faktor ist Null für $x_1 = 0$. Der erste Schnittpunkt lautet also $N_1(0/0)$.
* Wann der zweite Faktor Null ist, können wir mit der „p-q-Formel“ entscheiden. Der Faktor ist Null für $x_2 = 3 + 0 = 3$ und $x_3 = x_2 = 3 – 0 = 3$. Der zweite Schnittpunkt lautet also $N_2(3/0)$.

3) Nullstellen der Ableitung:
* $f(x) = x^3 – 6x^2 + 9x \rightarrow f'(x) = 3x^2 – 12x + 9$
* Wann dieser Ausdruck Null ist, können wir mit der p-q-Formel entscheiden. Dazu müssen wir die Gleichung $3x^2 – 12x + 9 = 0$ durch Division durch Drei in die folgende Form bringen: $x^2 – 4x + 3 = 0$. Der Ausdruck ist Null für $x_1 = 2 – 1 = 1$ und $x_2 = 2 + 1 = 3$.

4) Bestimmung von Monotonie:
* Wir untersuchen die Intervalle $]-\infty; 1[$ und $]1; 3[$ und $]3;\infty[$ auf Monotonie.
* Anstatt einen Testwert zu bestimmen, überlegen wir uns dass $f'(x) = 3x^2 – 12x + 9$ eine nach oben geöffnete Parabel ist, welche die x-Achse in $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ zweimal schneidet.
* In den beiden Intervallen $]-\infty; 1[$ und $]3;\infty[$ befindet sich die Parabel also im positiven Wertebereich und die Funktion f ist dort streng monoton steigend.
* Im Intervall $]1; 3[$ befindet sich die Parabel hingegen im negativen Wertebereich und die Funktion f ist dort streng monoton fallend.

5) Bestimmung von Extrempunkten:
* Für Extrempunkte kommen die Nullstellen der Ableitung infrage, also $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$.
* Bei der Stelle $x_1 = 1$ handelt es sich um einen Hochpunkt, weil die Funktion dort von einem streng monoton steigenden in ein streng monoton fallendes Intervall übergeht. Der Hochpunkt lautet also $H(1/f(1)) = H(1/4)$.
* Bei der Stelle $x_2 = 3$ handelt es sich um einen Tiefpunkt, weil die Funktion dort von einem streng monoton fallenden in ein streng monoton steigendes Intervall übergeht. Der Tiefpunkt lautet also $T(3/f(3)) = T(3/0)$.

Zusatz – die Gleichung der Wendetangente:
* Aus Gründen der Symmetrie liegt der Wendepunkt genau zwischen Hoch- und Tiefpunkt, welche bei Drehung um 180° exakt auf den jeweils anderen Extrempunkt abgebildet werden.
* Wir suchen also die Gleichung der Tangente in W(2/2) und bestimmen dazu die Steigung der Tangente mithilfe der Ableitung: $f'(2) = -3 \rightarrow$ die Tangente hat also die Form $y = -3x + c$
* Der Punkt W(2/2) liegt auf der Tangente, und Einsetzen in $y = -3x + c$ liefert $c = 8$.
Die Gleichung der Tangente lautet also $y = -3x+8$.