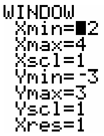
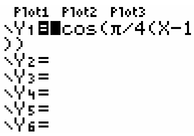
Lösung für das Übungsblatt 2 vom 03. April 2008

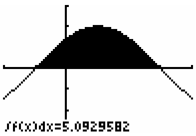
→ Aufgabe 4 Blatt 1

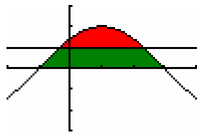
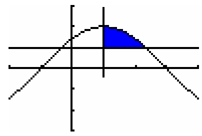
Das Schaubild K_f der Funktion f(x) schließt mit der x eine Fläche ein, welche durch eine waagerechte Gerade g halbiert werden soll.

$f(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}(x-1)\right)$ W = [-2;2]; Periode p = 8; entscheidende Nullstellen: -1 und 3







$$A = \int_{-1}^{3} 2\cos\left(\frac{\pi}{4}(x-1)\right)dx = \left[\frac{8}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}(x-1)\right)\right]_{-1}^{3} = \frac{8}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{-\pi}{2}\right) = \frac{8}{\pi}(1-(-1)) = \frac{16}{\pi} = 5{,}093$$

Wegen der Symmetrie zur Gerade x = 1 (Senkrechte durch den Hochpunkt H(1/2)) gilt auch:

$$A = 2\cdot\int_{1}^{3} 2\cos\left(\frac{\pi}{4}(x-1)\right)dx = 2\cdot\frac{8}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}(3-1)\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}(1-1)\right)\right) = 2\cdot\frac{8}{\pi}(1-0) = \frac{16}{\pi} = 5{,}093$$

Gesucht ist die waagerechte Gerade g mit g(x) u und 0 < u < 2 so, dass die rote Fläche den Inhalt $\frac{8}{\pi}$ bzw. die blaue Fläche den Inhalt $\frac{4}{\pi} = \frac{1}{4}\cdot\frac{16}{\pi}$ hat.

Das wird leider etwas schwer (und kommt so natürlich nicht in der Klausur!)

1. Der Schnittpunkt von g mit y = u mit K_f sei S(b/u) mit u = $2\cos\left(\frac{\pi}{4}(b-1)\right)$
2. Blaue Fläche:

$$\frac{4}{\pi} = \int_{1}^{b}(f(x)-u)dx = \int_{1}^{b}\left(f(x) - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}(b-1)\right)\right)dx = \left[\frac{8}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}(x-1)\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}(b-1)\right)\cdot x\right]_{1}^{b} =$$

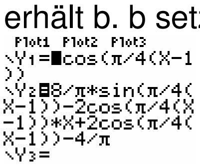
$$\left[\frac{8}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}(b-1)\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}(b-1)\right)\cdot b\right] - \left[\frac{8}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}(1-1)\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}(b-1)\right)\cdot 1\right] =$$

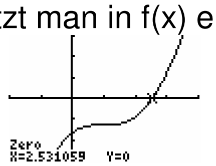
$$\left[\frac{8}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}(b-1)\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}(b-1)\right)\cdot b\right] - \left[0 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}(b-1)\right)\right] = \frac{4}{\pi}$$

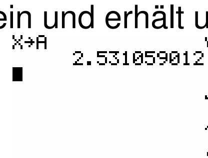
Jetzt braucht man „nur noch“ die Nullstelle der Funktion h(b) (im GTR hier Y2)

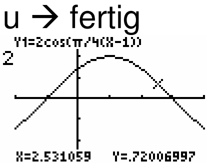
$h(b) = \left[\frac{8}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}(b-1)\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}(b-1)\right)\cdot b\right] + 2\cos\left(\frac{\pi}{4}(b-1)\right) - \frac{4}{\pi}$ ausrechnen und

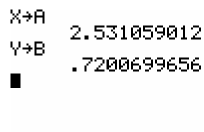
erhält b. b setzt man in f(x) ein und erhält u → fertig





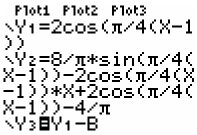




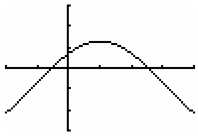


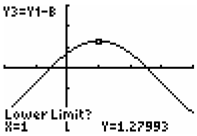
Die Gerade g hat also die Gleichung y = 0,72007

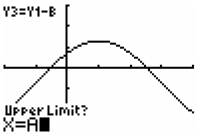
Man kann jetzt noch die Probe machen: (nicht verlangt!)



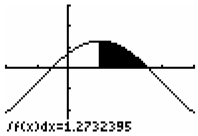
Das ist die Differenzfunktion zwischen f(x) und g

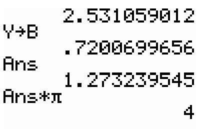






(Speicher A ist b =2,531... siehe oben → rechte Intervallgrenze der blauen Fläche)





Das heißt, dass der Flächeninhalt 1,27324 tatsächlich $\frac{4}{\pi}$ ist.