Blatt 02 Lösung Aufgabe 02 - 3

$f_t(x)=\dfrac{16}{x^2-t}$; $t\in R^+$; Schaubild sei K_t

a) Waagerechte Asymptote: y = 0 (x- Achse)
Senkrechte Asymptoten: a_1: x = $\sqrt{t}$; a_2: x = -$\sqrt{t}$
Keine Nullstellen

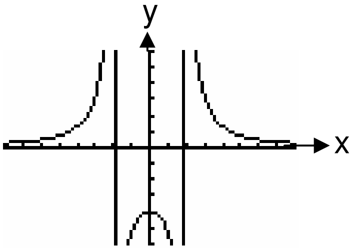
b) $f'(x)=\dfrac{-32x}{(x^2-t)^2}$ hat nur die Nullstelle 0, bei der das Vorzeichen von + auf – wechselt

→ Monotonie wechselt von steigend in fallend → H(0/f(0)) = (0/$\dfrac{-16}{t}$) oder mit:

$f''(0)=\dfrac{32t}{(-t)^3}=\dfrac{32t}{-t^3}=\dfrac{32}{-t^2}<0$

Für WP: $f''(x)=\dfrac{96x^2+32t}{(x^2-t)^3}\neq 0$ für alle x → keine WP

c) K_4 zeichnen: H; Nullst., WP, Verhalten im Unendlichen, Polstellen→ Schaubild



t = 4 $f_4(x)=\dfrac{16}{x^2-4}$
hat die Polstellen 2 und -2

d) Zeige, dass K_t und K_{t^*} für verschiedene Werte von t und t* keine Punkte gemeinsam haben!

$\dfrac{16}{x^2-t}=\dfrac{16}{x^2-t^*}\Rightarrow x^2-t=x^2-t^*\Rightarrow t=t^*$ für alle x

Aus $t\neq t^*$ folgt also $\dfrac{16}{x^2-t}\neq\dfrac{16}{x^2-t^*}$ für alle x, w.z.b.w.

(**Aus „Nicht B“ folgt „Nicht A“** ist semantisch äquivalent zu **Aus A folgt B**.
Man nennt das auch „Beweis durch Kontraposition“

e) Auf jedem K_t gibt es außer H_t zwei weitere Punkte P_t und Q_t, für welche die Normale durch den Ursprung geht. Berechne diese beiden Punkte. Auf welcher Linie liegen alle diese Punkte?

P(p/f(p)) → Q(q/f(q))=Q(-p/f(p)) wegen der y-Achsen – Symmetrie

n: $\dfrac{y-f(p)}{x-p}=\dfrac{-1}{f'(p)}$ soll durch O(0/0) gehen → x = 0 ; y = 0 Außerdem: $f'(p)=\dfrac{-32p}{(p^2-t)^2}$

n: $\dfrac{-\dfrac{16}{p^2-t}}{-p}=\dfrac{(p^2-t)^2}{32p}$; $p\neq 0\Leftrightarrow 512=(p^2-t)^3\Leftrightarrow 8=p^2-t$

$\Rightarrow p=\sqrt{t+8};q=-\sqrt{t+8}\quad\Rightarrow f(p)=f(q)=2$

D.h.: Für alle t liegen P und Q auf der Geraden g: y = 2