a) Kurvendiskussion

$f(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2=\frac{1}{4}x^2\cdot(x-4) \Rightarrow$ $x_1 = 0$ ist doppelte Nullstelle; $x_2 = 4$ ist Nullstelle

$N_1(0/0)$ (ist auch Extrempunkt) ; $N_2(4/0)$

$$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-2x=\frac{3}{4}x\cdot\left(x-\frac{8}{3}\right)=0 \quad \Rightarrow x_3=x_1=0; x_4=\frac{8}{3}$$

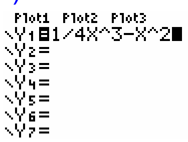
$$f''(x)=\frac{3}{2}x-2=0 \quad \Rightarrow x_5=\frac{4}{3}$$

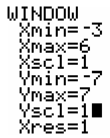
$$f''(0)=-2<0; f(0)=0 \Rightarrow H(0/0)=N_1$$

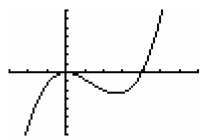
$$f''\left(\frac{8}{3}\right)=2>0; f\left(\frac{8}{3}\right)=-\frac{64}{27} \Rightarrow T\left(\frac{8}{3}/-\frac{64}{27}\right)$$

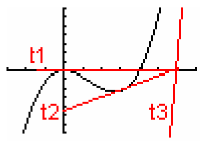
$$f'''\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{3}{2}\neq 0; f\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{32}{27} \Rightarrow W\left(\frac{4}{3}/-\frac{32}{27}\right)$$

b)Schaubild: Wertetabelle mit GTR









c)Tangenten vom Punkt P (6/0) an das Schaubild K_f: Es gibt drei, wie man sehen kann.

$t: \frac{y_P-y_B}{x_P-x_B}=m$ mit $m = f'(x_B)$; $y_P = 0$; $x_P = 6$ und $y_B = f(x_B)$ ergibt sich für x_B:

$$\frac{0-\left(\frac{1}{4}x_B{}^3-x_B{}^2\right)}{6-x_B}=\frac{3}{4}x_B{}^2-2x_B \text{ und damit}$$

$$-\frac{1}{4}x_B{}^3+x_B{}^2=-\frac{3}{4}x_B{}^3+\frac{13}{2}x_B{}^2-12x_B \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}x_B{}^3-\frac{11}{2}x_B{}^2+12x_B=\frac{1}{2}x_B\cdot(x_B{}^2-11x_B+24)=\frac{1}{2}x_B\cdot(x_B-3)\cdot(x_B-8)=0$$

$x_{B1} = 0$; $f(0) = 0$; $f'(0) = 0 \rightarrow$ t_1: $\frac{y-0}{x-0}=0 \Rightarrow$ t_1: $y = 0$

$x_{B2} = 3$; $f(3) = -2{,}25$; $f'(3) = 0{,}75 \rightarrow$ t_2: $\frac{y+2{,}25}{x-3}=\frac{3}{4} \Rightarrow$ t_2: $y = 0{,}75x - 4{,}5$

$x_{B3} = 8$; $f(8) = 64$; $f'(8) = 32 \rightarrow$ t_3: $\frac{y-64}{x-8}=32 \Rightarrow$ t_3: $y = 32x - 192$

d) Normale im Wendepunkt Punkt $W\left(\frac{4}{3}/-\frac{32}{27}\right)$ und $f'\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{4}{3}$

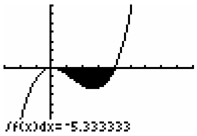
$$n: \frac{y-y_W}{x-x_W}=-\frac{1}{f'(x_W)} \qquad n: \frac{y+\frac{32}{27}}{x-\frac{4}{3}}=-\frac{1}{f'(x_W)}=\frac{3}{4} \Rightarrow y=\frac{3}{4}x-\frac{59}{27}$$

zu c und d) Flächen

Jede der drei Tangenten berührt die Kurve und schneidet sie in einem weiteren Punkt.
Bei t_1 sind die beiden Punkte bekannt (N_1 und N_2, wegen t_1: y = 0)

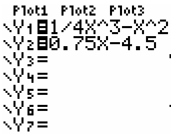
---

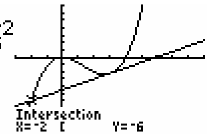
t_1: y = 0 berührt bzw. schneidet K_f bei x_1 = 0 und x_2 = 4 (siehe Aufgabe a))



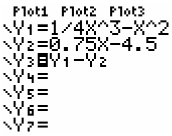
$$A_1 = \int_0^4 (0 - f(x))dx = 5,\overline{3}FE$$

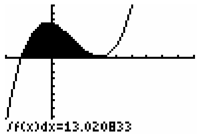
Bei t_2 ist der Berührpunkt bekannt, den Schnittpunkt erhält man mit GTR → Intersect





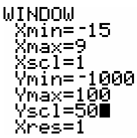
t_2: y = 0,75x - 4,5 berührt bzw. schneidet K_f bei x_1 = -2 und x_2 = 3

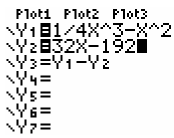


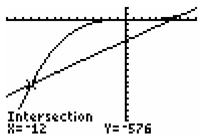


$$A_2 = \int_{-2}^{3} (f(x) - (0,75x - 4,5))dx = 13,02FE$$

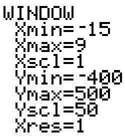
Bei t_3 ist der Berührpunkt bekannt, den Schnittpunkt erhält man mit GTR → Intersect

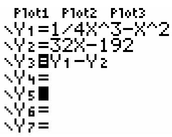






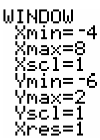
t_3: y = 32x - 192 berührt bzw. schneidet K_f bei x_1 = -12 und x_2 = 8

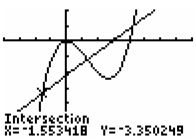


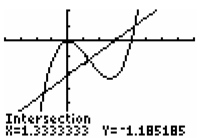


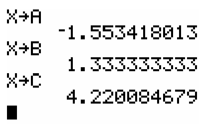
$$A_3 = \int_{-12}^{8} (f(x) - (32x - 192))dx = 3333,\overline{3}FE$$

Bei n ist der Wendepunkt bekannt, die anderen Schnittpunkte … mit GTR → Intersect

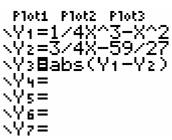


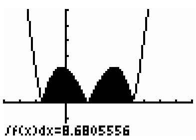






$n: y = \frac{3}{4}x - \frac{59}{27}$ schneidet K_f bei x_1 = -1,553 ; x_2 = 1,333 und x_3 = 4,220





$$A_4 = \int_{-1,553}^{4,220} \left| f(x) - \left(\frac{3}{4}x - \frac{59}{27}\right) \right| dx = \frac{625}{72} = 8,68FE$$