Lösung der 2. Mathematikklausur vom 17.12.2007

Aufgabe 5: Gegeben ist die geometrische Zahlenfolge $\{a_n\}$ mit $a_n = \frac{12}{n+1}; n \geq 1$

a) Gib die ersten fünf Glieder als Dezimalzahlen an: **6; 4; 3; 2,4; 2; ...** 1 P.

b) Beweise, dass $\{a_n\}$ streng monoton fallend ist!

$$a_{n+1} - a_n = \frac{12}{n+1+1} - \frac{12}{n+1} = \frac{12 \cdot (n+1) - 12 \cdot (n+2)}{(n+2) \cdot (n+1)} = \frac{-12}{(n+2) \cdot (n+1)} < 0 \Rightarrow$$

$\{a_n\}$ ist streng monoton fallend, w. z. b. w. 2 P.

c) Beweise, dass $\{a_n\}$ durch 6 und 0 beschränkt ist!

Zu zeigen ist also zuerst: $\frac{12}{n+1} \leq 6$ für alle $n \geq 1$

$$\frac{12}{n+1} \leq 6 \Leftrightarrow 12 \leq 6 \cdot (n+1) \Leftrightarrow 2 \leq n+1 \Leftrightarrow 1 \leq n$$

D.h.: Für alle $n \geq 1$ gilt: $a_n \leq 6$, w. z. b. w. 1 P.

Zu zeigen ist auch noch : $\frac{12}{n+1} \geq 0$ für alle $n \geq 1$

Zähler und Nenner sind bei allen ZF - Gliedern positiv,
womit die Behauptung bewiesen ist. 1 P.

d) Beweise mit Hilfe der Definition des Grenzwertes einer Zahlenfolge, dass $\{a_n\}$ eine Nullfolge ist!

Z.z. ist, dass für jedes positive ε für fast alle n gilt: $|a_n - 0| < \varepsilon$ 1 P.

Wegen $a_n > 0$ (siehe c) gilt: $|a_n - 0| = a_n$

Es ist also zu zeigen: $\frac{12}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{12}{\varepsilon} < n+1 \Leftrightarrow \frac{12}{\varepsilon} - 1 < n$ 1 P.

Und das ist für fast alle n erfüllt, egal wie klein ε ist, w. z. b. w.