Lösung der 2. Mathematikklausur vom 17.12.2007

Aufgabe 1: $f(x) = x^2 \cdot \sin(7x+1) \rightarrow$ $f'(x) = 2x\cdot\sin(7x+1) + x^2\cdot\cos(7x+1)\cdot 7$

$f'(x) = x\cdot(2\cdot\sin(7x+1) + 7x\cdot\cos(7x+1))$ 1 P.

Aufgabe 2: $\int_2^6 \frac{1}{\sqrt{4x+1}}dx = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot(4x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{4}\right]_2^6 = \left[\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(4x+1)}\right]_2^6 = 2{,}5 - 1{,}5 = 1\text{FE}$ 3 P.

Aufgabe 3: Arithmetischen Zahlenfolge:

$a_3 = 5$ und $a_7 = 17$. $\Rightarrow d = \frac{17-5}{7-3} = \frac{12}{4} = 3$ 1 P.

$a_1 = 5 - 2\cdot 3 = -1$ 1 P.

$a_{100} = -1 + 99\cdot 3 = 296$ 1 P.

$s_{100} = 100\cdot(-1) + \frac{99\cdot 100}{2}\cdot 3 = 14750$ 1 P.

Oder: $s_{100} = 0{,}5\cdot(-1+296)\cdot 100 = 295\cdot 50 = 14750$

Aufgabe 4a): 5 P.

Beweise durch vollständige Induktion: $7 + 13 + 19 + ... + (1 + 6n) = n\cdot(3n+4)$!

Ind.-Anf.: $n = 1$: $7 = 1\cdot(3\cdot 1 + 4) = 7$; wahre Aussage

Ind.-Schr.: **Vor.:** $n = k$: $7 + 13 + 19 + ... + (1+6k) = k\cdot(3k+4)$

Beh.: $n = k+1$: $7 + 13 + 19 + ... + (1+6k) + (1+6\cdot(k+1)) = (k+1)\cdot(3(k+1)+4)$

$= (k+1)\cdot(3k+7)$

$= 3k^2 + 10k + 7$

Bew.: $7 + 13 + 19 + ... + (1+6k) + (1+6\cdot(k+1)) =$

$k\cdot(3k+4) + (1+6\cdot(k+1)) =$

$3k^2 + 4k + 7 + 6k = 3k^2 + 10k + 7$, w. z. b. w.

Aufgabe 4b): 5 P.

Beweise durch vollständige Induktion: $11|(12^n - 1)$!

D. h. : Es ist zu zeigen: $12^n - 1 = 11\cdot r$ mit $r \in \mathrm{N}$

Ind.-Anf.: $n = 0$: $12^0 - 1 = 0 = 11\cdot 0$; $0 \in \mathrm{N}$ wahre Aussage

Ind.-Schr.: **Vor.:** $n = k$: $\underline{12^k - 1 = 11\cdot s}$; $s \in \mathrm{N}$

Beh.: $n = k+1$: $12^{k+1} - 1 = 11\cdot t$; $t \in \mathrm{N}$

Bew.: $12^{k+1} - 1 = 12^1\cdot 12^k - 1 = (11+1)\cdot 12^k - 1 = 11\cdot 12^k + \underline{12^k - 1}$

$= 11\cdot 12^k + \underline{11\cdot s} = 11\cdot(12^k + s)$ mit $12^k + s = t \in \mathrm{N}$,

w. z. b. w.