Lösung Übungsblatt 5 für die Klasse 13B

Martin Wellmann 08.01.2009

Gegeben sind P(4/2/0); Q(2/4/0); R(0/4/2); und S(0/2/4).

a) Zeige, dass PQ, QR und RS gleich lang sind!

Alle haben die Länge $l = \sqrt{8}$

b) Zeige, dass PQRS ein Trapez ist!

$\overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \overrightarrow{QR} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ PQRS hat also zwei parallele Seiten → Trapez

c) Bestimme die Gleichung der Ebene E = E_{PQRS}!

E: $x_1 + x_2 + x_3 = 6$

d) Berechne den Winkel zwischen E und der x_1-x_2- Ebene!

Normalenvektor der „Fußbodenebene": $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; Normalenvektor von E: $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Winkel: $\cos\alpha = \dfrac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = 54{,}7°$

e) Das Trapez lässt sich durch T und U zu einem regelmäßigen Sechseck ergänzen. Bestimme T, U und den Mittelpunkt M des Sechsecks!

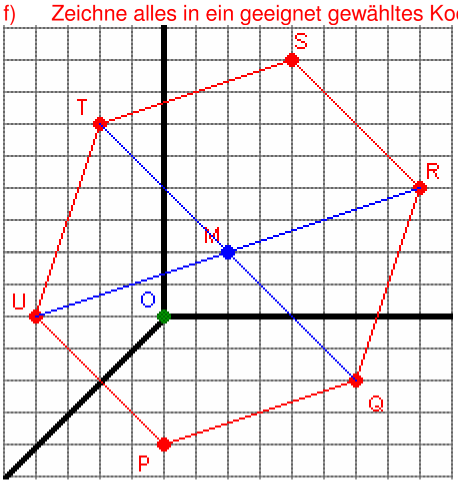
$M_{PS} = M(2/2/2)$

Zur Kontrolle: $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow S(0/2/4)$, was bekannt ist.

Analog: $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{RM} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OU} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow U(4/0/2)$

Und: $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{QM} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow T(2/0/4)$

f) Zeichne alles in ein geeignet gewähltes Koordinatensystem!



g) Das Sechseck ist die Grundfläche einer geraden Pyramide, deren Spitze in der x_1-x_2- Ebene liegt. Bestimme die Koordinaten der Spitze und das Volumen der Pyramide!

Gerade g durch M senkrecht zu E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

schneidet x_1-x_2- Ebene $x_3 = 0$ in O(0/0/0) für t = -2.

Die Grundfläche besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken mit l = $\sqrt{8}$ → siehe a)

$$A = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{8} = 12 \cdot \sqrt{3}$$

h erhält man, indem man O in die HNF von E einsetzt:

HNF: $\frac{x_1 + x_2 + x_3 - 6}{\sqrt{3}} = 0$ → O einsetzen: $h = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{3} = 2 \cdot \sqrt{3}$

Volumen der Pyramide: $V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 24 \text{VE}$

h) Der Pyramide wird eine Kugel einbeschrieben! Bestimme Mittelpunkt und Radius der Kugel!

Der Mittelpunkt M* der Kugel liegt auf g aus Aufgabe g)

g lässt sich auch in der Form $\vec{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ darstellen, da O auf g liegt. → M*(t/t/t)

Setzt man für t = 0, erhält man O, setzt man für t = 2, erhält man M.
Daraus folgt für M*, dass 0 < t < 2 muss, weil M* im Innern der Pyramide ist.
M* muss von E und allen sechs Seitenflächen den gleichen Abstand haben.
Die Seitenfläche OPQ hat die Gleichung $x_3 = 0$, M* hat von ihr den Abstand t (wie übrigens zu jeder der drei Koordinatenebenen.)

Damit hat M* auch zu E den Abstand t, was bedeutet: $\left| \frac{t + t + t - 6}{\sqrt{3}} \right| = t$

Daraus ergeben sich die Gleichungen: $\frac{3t - 6}{\sqrt{3}} = t$ und $\frac{3t - 6}{\sqrt{3}} = -t$ und damit:

$3t \pm \sqrt{3}t = 6 = \left(3 \pm \sqrt{3}\right)t \Rightarrow t = \frac{6}{3 \pm \sqrt{3}}$ t_1=4,732... > 2 entfällt

$t = \frac{6}{3 + \sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \left(3 - \sqrt{3}\right)}{\left(3 + \sqrt{3}\right) \cdot \left(3 - \sqrt{3}\right)} = \frac{6 \cdot \left(3 - \sqrt{3}\right)}{9 - 3} = 3 - \sqrt{3} \approx 1{,}26$ erfüllt die Bedingungen.

Daraus folgt: $M\left(3 - \sqrt{3} / 3 - \sqrt{3} / 3 - \sqrt{3}\right)$ ist der Mittelpunkt der Kugel, r = $3 - \sqrt{3}$ ist der Radius.

i) Welcher Punkt der x_1- Achse hat von der Kugel den geringsten Abstand?

Der Punkt mit dem kürzesten Abstand zu M* auf der x_1-Achse muss der Fußpunkt des Lotes von M* auf die x_1-Achse sein: L($3 - \sqrt{3}$ /0/0), wie man sich leicht überlegt.