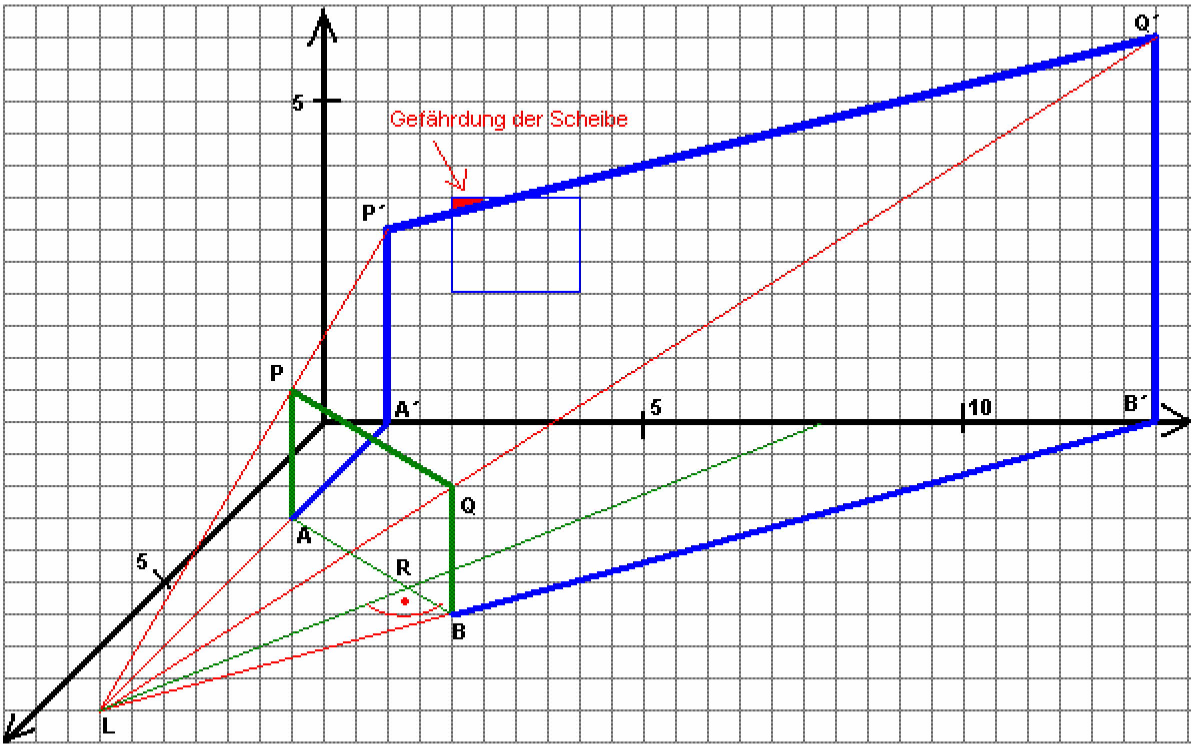
Lösung zu Übungsblatt 4 für die Klasse 13B

Martin Wellmann 07.01.2009

In den Punkten A(3/1/0) und B(6/5/0) stehen zwei jeweils zwei Meter hohe senkrechte Pfosten und bilden mit einem Querbalken ein Fußballtor. Im Punkt L(9/1/0) befindet sich ein Scheinwerfer, die x_2-x_3- ist eine Hauswand.

a) Das Tor wirft einen Schatten! Zeichne alles in das Koordinatensystem ein! Berechne die notwendigen Punkte! Alle für die Konstruktion notwendigen Punkte sind zu berechnen!



$$g_{LA}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ schneidet E: $x_1 = 0$ für a = 1,5 in A´(0/1/0)

$$g_{LB}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$ schneidet E: $x_1 = 0$ für b = 3 in B´(0/13/0)

$$g_{LP}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$ schneidet E: $x_1 = 0$ für c = 1,5 in P´(0/1/3)

$$g_{LQ}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$ schneidet E: $x_1 = 0$ für d = 3 in B´(0/13/6)

b) Wie breit ist das Tor? |PQ| = |AB| = 5m.

c) Der Schatten auf der Hauswand und der Punkt L bilden eine Pyramide. Berechne deren Volumen!

$V = \frac{1}{3} A_G \cdot h$ mit h ist |LA´| = 9m, da LA´ senkrecht auf E: $x_1 = 0$ steht.

A_G ist das Trapez A´B´Q´P´in E: $x_1 = 0$ mit A = 0,5(3m + 6m)·12m = 54m²

→ V = 162m³.

Jetzt wird der Scheinwerfer entfernt und vom Punkt L auf das Tor geschossen.

d) Trifft man das Tor, wenn man rechtwinklig und flach auf das Tor schießt? (Zeichnerische oder rechnerische Lösung!)

LR steht senkrecht auf AB → $\overrightarrow{LR} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ R ist Punkt der Geraden AB: R(3+3t/1+4t/0)

$$\begin{pmatrix} 9-3-3t \\ 1-1-4t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 18-25t = 0 \Rightarrow t = \frac{18}{25} \Rightarrow 0 < t < 1$$ →R(5,16/3,88/0) liegt in AB.

Zeichnerisch: Senkrecht zu $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist zum Beispiel Vektor $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ Trägt man diesen mehrfach an L an, schneidet die entstehende Gerade Strecke AB im Inneren in R.

e) Berechne die Entfernung!

$|LR| = \sqrt{(9-5{,}16)^2 + (1-3{,}88)^2}$ =4,8 m Oder besser:

E_{ABQP}: $-4x_1 + 3x_2 + 9 = 0$ In die HNF: $\frac{-4x_1 + 3x_2 + 9}{5} = 0$ den Punkt L einsetzen:

$d(L,E_{ABQP}) = \left| \frac{-4 \cdot 9 + 3 \cdot 1 + 9}{5} \right| = 4{,}8$

f) Die Punkte E(0/2/2) und F(0/4/2) bilden die Unterkante eines 1,5 m hohen Fensters. Im Tor ist ein Netz gespannt, die Bälle werden scharf, d.h. geradlinig geschossen. Ermittle mit Hilfe der Zeichnung, ob das Fenster gefährdet ist!

Die Schüsse mit dem Ball sind geometrisch das Gleiche wie die Lichtstrahlen. Innerhalb des Schattens können wegen des im Tor gespannten Netzes keine Bälle ankommen. Das Fenster ragt mit dem roten Dreieck über den Schatten hinaus und ist deshalb durch das Ballspiel gefährdet. Siehe Zeichnung von Aufgabe a).