Übungen mit Lösungen für Langzeitklausur am 5.02.2013

Ohne Hilfsmittel

1. **Aufgabe**

Bilde die erste Ableitung der Funktion ***f***.

a) $f(x)=(x^2+1)\cdot e^{x^2+1}$; $f'(x)=2x\cdot e^{x^2+1}+(x^2+1)\cdot 2x\cdot e^{x^2+1}=2x\cdot e^{x^2+1}\cdot(1+(x^2+1))=2x\cdot e^{x^2+1}\cdot(x^2+2).$

b) $f(x)=\cos(2x)\cdot(x^2+1)$;

$f'(x)=2\cdot(-\sin(2x))\cdot(x^2+1)+\cos(2x)\cdot 2x=2x\cdot\cos(2x)-2\cdot(x^2+1)\cdot\sin(2x)=2\cdot(x\cos(2x)-(x^2+1)\cdot\sin(2x)).$

c) $f(x)=\cos(x)\cdot e^x$; => $f'(x)=-\sin(x)\cdot e^x+\cos(x)\cdot e^x=e^x\cdot(\cos(x)-\sin(x)).$

2. **Aufgabe**

a) Gegeben ist $\int_0^a (x+1)dx=12$. Berechne a mit a > 0.

$$\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^a=12$$

$$\frac{a^2}{2}+a=12$$

$$\frac{a^2}{2}+a-12=0$$

$$a^2+2a-24=0 \quad \to p-q-Formel, mit \quad p=2,\quad q=-24$$

$$a_{1/2}=-\frac{2}{2}\pm\sqrt{1+24}=-1\pm\sqrt{25}=-1\pm 5$$

$$a_1=-6 \quad und \quad a_2=4; \qquad (a>0) \quad => L=\{4\}.$$

b) Berechne $\int_0^{\ln(8)}(2\cdot e^{\frac{1}{3}x})dx=\left[\frac{2}{\frac{1}{3}}\cdot e^{\frac{1}{3}x}\right]_0^{\ln(8)}=\left[6\cdot e^{\frac{1}{3}x}\right]_0^{\ln(8)}=6\cdot e^{\frac{1}{3}\ln(8)}-6\cdot e^{\frac{1}{3}\cdot 0}=6\cdot e^{\ln\sqrt[3]{8}}-6\cdot 1=$

$=6\cdot e^{\ln 2}-6=6\cdot 2-6=6.$

3. **Aufgabe**

Löse die Gleichung

a) $x^5-7x^2=\frac{8}{x} \quad /\cdot x$

$$x^6-7x^3=8$$

$$x^6-7x^3-8=0, \quad \to Substitution: \quad x^3=z$$

$$z^2-7z-8=0 \quad \to p-q-Formel, \quad mit \quad p=-7,\quad q=-8$$

$$z_{1/2}=-(\frac{-7}{2})\pm\sqrt{\frac{49}{4}+8}=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}+\frac{32}{4}}=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{81}{4}}=\frac{7}{2}\pm\frac{9}{2}=3{,}5\pm 4{,}5$$

$$z_1=8 \quad und \quad z_2=-1 \quad \to Rücksubstitution$$

$$x^3=8 \qquad x^3=-1$$

$$x_1=2, \qquad x_2=-1 \qquad L=\{-1;2\}$$

b) $(\ln(x))^2=2\ln(x), \quad \to Substitution: \quad \ln(x)=z,$

$$=> \qquad z^2=2z$$

$$z^2-2z=0 \to Nullprodukt:$$

$$z\cdot(z-2)=0$$

$$z_1=0 \quad und \quad z_2=2 \quad \to Rücksubstitution$$

$$\ln(x)=0, \qquad \ln(x)=2$$

$$x_1=1, \qquad x_2=e^2 \qquad => L=\{1;e^2\}.$$

c)

$$\cos(x)\cdot\sin(x)+\cos(x)=0 \quad => \quad \textit{Nullprodukt}:$$

$$\cos(x)\cdot(\sin(x)+1)=0, \qquad \textit{für} \quad 0\le x\le 2\pi \quad \textit{gilt}:$$

$$\cos(x)=0, \quad => \quad x_1=\frac{\pi}{2}, \quad x_2=\frac{3\pi}{2}; \quad \textit{und} \quad \sin(x)+1=0$$

$$\sin(x)=-1, \quad => x_3=\frac{3\pi}{2}, => \quad L=\left\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\}.$$

d) $e^{6x}-5e^{3x}=6$

$$e^{6x}-5e^{3x}-6=0, \quad \textit{bzw.} \quad (e^{3x})^2-5e^{3x}-6=0 \quad \to \textit{Substitution}: \quad e^{3x}=z$$

$$z^2-5z-6=0 \quad \to p-q-\textit{Formel}, \quad \textit{mit} \quad p=-5, \quad q=-6$$

$$z_{1/2}=-(\frac{-5}{2})\pm\sqrt{\frac{25}{4}+6}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{24}{4}}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{5}{2}\pm\frac{7}{2} \quad =2{,}5\pm 3{,}5$$

$$z_1=6 \quad \textit{und} \quad z_2=-1 \quad \to \textit{Rücksubstitution}:$$

$$e^{3x}=6 \quad \textit{und} \quad e^{3x}=-1 \to \textit{keine Lösung}, \quad \textit{da} \quad -1<0 \quad \textit{ist}$$

$$3x=\ln(6)$$

$$x=\frac{\ln(6)}{3}, \quad => \quad L=\left\{\frac{1}{3}\ln(6)\right\}.$$

4. <u>Aufgabe</u>

Gegeben sind die Funktion *f* und der Punkt P: $f(x)=x^3+1;$ *und* $P(-1/\,f(-1))$.

1) Der Schnittpunkt mit der x-Achse => Nullstelle: *N(x_0 / 0)!*

$$=> \quad x^3+1=0$$

$$x^3=-1$$

$$x=-1 \quad => \quad N(-1/0).$$

2) Der Schnittpunkt mit der y-Achse => y-Achsenabschnitt: *A(0 / f(0))!*

$$=> \quad f(0)=0^3+1=1 \quad => \quad A(0/1).$$

3) Den Wendepunkt berechnen.
Bedingungen sind: $f''(x)=0$ *und* $f'''\neq 0.$

$$f(x)=x^3+1,$$

$$f'(x)=3x^2, \qquad f''(x)=6x, \qquad f'''(x)=6\neq 0.$$

$$6x=0,$$

$$x=0 \quad \textit{in} \quad f(x) \quad \textit{einsetzen} \quad => \quad f(0)=1 \quad => \quad \textit{Wendepunkt} \quad W(0/1).$$

4) Die Gleichung der Tangente y_t im Punkt *P(-1 / f(-1))* ermitteln.

$$y_t=f'(x_P)\cdot(x-x_P)+f(x_P)$$

$$f(-1)=(-1)^3+1=-1+1=0 \quad => \quad P(-1/0),$$

$$f'(-1)=3\cdot(-1)^2=3,$$

$$=> \quad y_t=3\cdot(x-(-1))+0 \quad => \quad y_t=3x+3.$$

5) Schnittpunkte von $\mathbf{K}_f$ und **t** ermitteln.
Die Gleichungen von ***f*** und von **t** werden gleichgesetzt (bzw. aus der Skizze abgelesen):

$$x^3+1=3x+3 \quad => \quad x^3-3x-2=0 \quad => x_1=-1, \quad x_2=2,$$

$$=> \quad Q(2/9) \quad \textit{ist der zweite Schnittpunkt}.$$