Klasse 12 06.10.2012 Martin Wellmann

20121007-12A4 Lösung zu A 12 → L 13 folgt

A12 LB S. 85 Nr. 3c oder: Auch Lehrer werden bestraft, wenn sie nicht richtig lesen ☺

$K(t) = \frac{ac}{a-b}\left(e^{-bt} - e^{-at}\right)$ t ist die Zeit in Stunden.

Und man sieht: a ≠ b, da sonst im Nenner eine „Null“ steht.

a) Es war gefragt: Wie muss man b wählen, damit das Maximum bei t = 1,5 auftritt.

b) Es war nicht gefragt: Wie groß kann die Konzentration bei t = 1,5 maximal werden.

L12 Lösungsweg I zu a) (weitgehend) ohne GTR

Aus $K'(t) = \frac{ac}{a-b}\left(-be^{-bt} + ae^{-at}\right)$ K'(t) = 0 folgt (wegen $\frac{ac}{a-b} \neq 0$):

$\left(-be^{-bt} + ae^{-at}\right)$ und damit

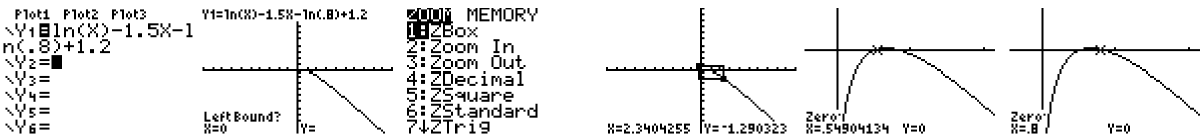
$be^{-bt} = ae^{-at}$ |ln auf beiden Seiten →Logarithmengesetz: ln(ab) = ln(a) + ln(b)

$\ln(b) + \ln\left(e^{-bt}\right) = \ln(a) + \ln(e^{-at})$

$\ln(b) - bt = \ln(a) - at \rightarrow t = \frac{\ln(a)-\ln(b)}{a-b}$

Es muss also gelten: $\ln(b) - 1{,}5bt = \ln(0{,}8) - 1{,}2$

Ohne GTR geht es hier nicht weiter:

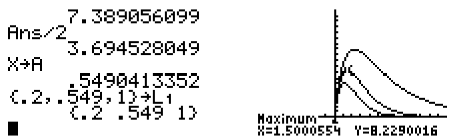


b = 0,8 scheidet wegen a = 0,8 aus → b = 0,549

Vorüberlegung für die Lösung zu b)

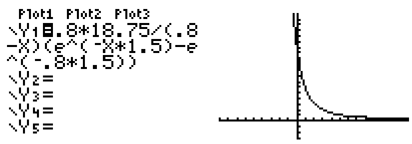
Das Schaubild zeigt (von oben nach unten) die Grafen für

b = 0,2; b = 0,549; b = 1



Der zweite Graf hat, wie verlangt, bei t = 1,5 den Hochpunkt. Der erste Graf hat bei t = 1,5 zwar noch nicht den Hochpunkt aber trotzdem einen größeren Funktionswert als der erste.

Folgender (falscher) Ansatz mit t = 1,5
und b als Variable (linkes Bild)
führt zu der Erkenntnis: Je kleiner b, desto größer die Konzentration nach 1,5 Stunden (rechtes Bild), **was aber nicht die Antwort** auf die Frage LB S. 85 Nr. 3c ist.



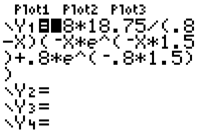
Fazit: Wenn gefragt wird, unter welchen Bedingungen etwas am höchsten / niedrigsten ist, muss man die Ableitung der Größe gleich Null setzen – wie bei Lösungsweg a)I

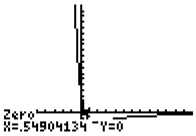
(oder a) II →nächste Seite).

Aber das wusstet Ihr ja schon ☺

L12 Lösungsweg II zu a) (weitgehend **)mit GTR

Aus $K'(t) = \frac{ac}{a-b}\left(-be^{-bt} + ae^{-at}\right)$ K'(t) = 0 sieht im GTR dann so aus (t = 1,5; b = x)





Also b = 0,549 – wie bei Lösung a.

Bemerkung: Da auch Weg a (Die Lösung ist im Buch auf S. 422 ja nicht ausgeführt) ohne GTR nicht auskommt und nicht allen die Logarithmengesetze und die benötigten Umformungen so leicht fallen, ist der Weg II der bessere.

** Um das Ableiten von Hand kommt man aber nicht herum!

Schwierig ist hier die Erkenntnis (auch für den Lehrer, wenn er nicht richtig liest ☹), dass man erst nach t ableiten muss und dann in diese Ableitung t = 1,5 einsetzen und sie darauf untersuchen muss, für welches b sie gleich Null ist.

Beim falschen Lösungsweg b wird die Funktion nämlich nach b und nicht nach t abgeleitet.