Lösungsblatt *(Erstellt von Frau Pichler)*

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden vier Funktionen:

a) $f(x) = \frac{1}{2x^3} + 2\sqrt{x} + \frac{4x}{x^2} = \frac{1}{2}x^{-3} + 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-1}$

$f'(x) = -\frac{3}{2x^4} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{4}{x^2}$

b) $g(x) = e^{2x} \cdot \sin(3x^2)$

$g'(x) = 2e^{2x} \cdot \sin(3x^2) + e^{2x} \cdot \cos(3x^2) \cdot 6x$

$= 2e^{2x} \cdot (\sin(3x^2) + 3xcos(3x^2))$

c) $h(x) = \cos(x^3 + 4x) \cdot (3x^2 + 4)$

$h'(x) = -\sin(x^3 + 4x) \cdot (3x^2 + 4) \cdot (3x^2 + 4) + \cos(x^3 + 4x) \cdot 6x$

$= -\sin(x^3 + 4x) \cdot (3x^2 + 4)^2 + 6x \cdot \cos(x^3 + 4x)$

Aufgabe 2

1. Bilden Sie zu den folgenden Funktionen die Stammfunktion:

a) $f(x) = x^3 + \cos(2x + 3)$

$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}\sin(2x + 3) + c$

b) $g(x) = \frac{4}{3x+2}$

$G(x) = \frac{4}{3}\ln|3x + 2| + c$

c) $h(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{x^4+x^2}{4x^2}$

$H(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x + c$

2. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mithilfe des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung:

a)

$$\int_{-1}^{1} (2x + 5x^3 + 3)\, dx = \left[x^2 + \frac{5}{4x^4} + 3x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(1^2 + \frac{5}{4 \cdot 1^4} + 3 \cdot 1\right)$$

$$-\left((-1)^2 + \frac{5}{4 \cdot (-1)^4} + 3 \cdot (-1)\right)$$

$$= 1 + \frac{5}{4} + 3 - 1 - \frac{5}{4} + 3 = 6$$

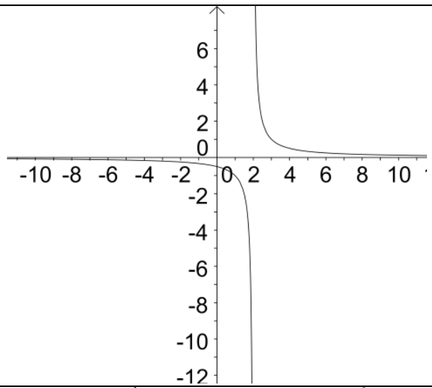
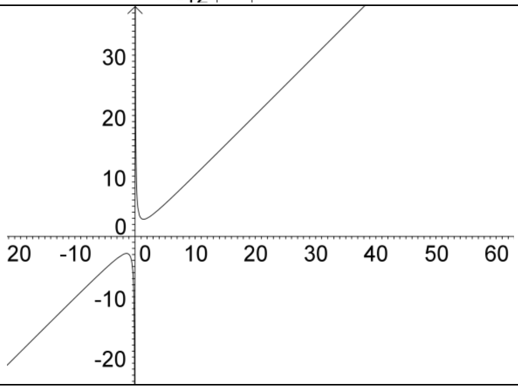
b)

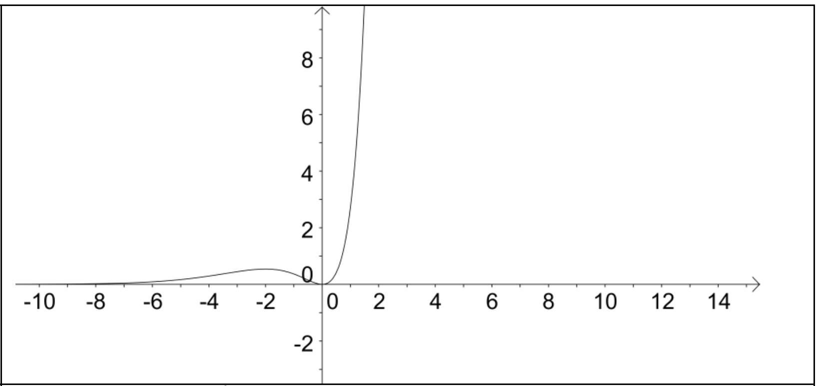
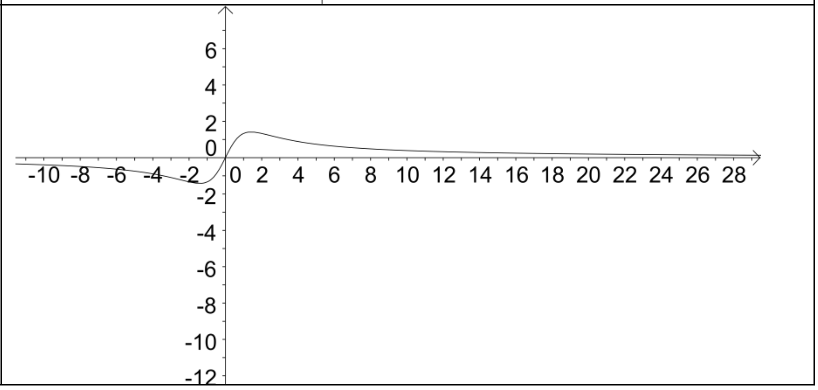
$$\int_0^1 (2x+3)^3\,dx = \left[\frac{1}{8}(2x+3)^4\right]_0^1$$
$$= \left(\frac{1}{8}(2\cdot 1+3)^4\right) - \left(\frac{1}{8}(2\cdot 0+3)^4\right) = \frac{1}{8}\cdot 5^4 - \frac{1}{8}\cdot 3^4$$
$$= \frac{625}{8} - \frac{81}{8} = \frac{544}{8} = 68$$

Aufgabe 3

1. Lösen Sie die folgende Gleichung (Hinweis: Substitution):
   $x^4 + 12x^2 - 28 = 0$
   Substitution: $x^2 = u$
   $\Rightarrow u^2 + 12u - 28 = 0$
   $\Rightarrow u_{1,2} = -\frac{12}{2} \pm \sqrt{36+28} = -6 \pm \sqrt{64} = -6 \pm 8$
   $\Rightarrow u_1 = 2$ und $u_2 = -14$
   Rücksubstitution: $u_1 = x_{1,2}^2 \Leftrightarrow 2 = x_{1,2}^2 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$
   $u_2 = x_{3,4}^2 \Leftrightarrow -14 = x_{3,4}^2$ keine Lösung in $\mathbb{R}$

2. Ordnen Sie die folgenden Schaubilder den jeweiligen Funktionen zu:

1	
2	

3	
4	

a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

b) $g(x) = \frac{4x}{x^2+2}$

c) $h(x) = \frac{x^3+2x}{x^2}$

d) $k(x) = e^x x^2$

Es stimmen die folgenden Paare: 1a), 4b), 2c), 3d)

3. Entscheiden Sie, ob die Aussage „wahr“, „falsch“ oder „nicht entscheidbar“ ist:
   Lösung kommt vielleicht noch. ☺

4. Gegeben sei die Funktion $f(x) = (x-2)^2 \cdot x$. Wie lautet die Gleichung der Tangenten an das Schaubild K_f durch den Punkt $A(1|1)$?
   $f'(x) = 2(x-2) \cdot x + (x-2)^2$
   Steigung der Tangenten: $m_t = f'(1) = 2(1-2) \cdot 1 + (1-2)^2 = -2 + 1 = -1$
   Die Tangente soll durch den Punkt A verlaufen. Wir wissen, dass $f(1) = 1$ gilt. Damit kann die Tangentengleichung aufgestellt werden:
   $t: y = m_t \cdot x + c$
   $t: y = (-1) \cdot x + c$
   Mithilfe der Bedingung $f(1) = 1$ folgt:
   $1 = (-1) \cdot 1 + c \;\Leftrightarrow 1 = -1 + c \;\Leftrightarrow c = 2$
   $\Rightarrow t: y = (-1) \cdot x + 2 = -x + 2$

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion $f_t(x) = x^2(x + 2t)$ mit $t \in \mathbb{R}$. Bestimme die Ortslinie der Funktion auf der alle Extrempunkte der Funktion liegen.

$f'(x) = 2x(x + 2t) + x^2 = 3x^2 + 4tx$

$f'(x) = 0 = x(3x + 4t) \Rightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{4}{3}t$

$$f\left(-\frac{4}{3}t\right) = \left(-\frac{4}{3}t\right)^2 \left(-\frac{4}{3}t + 2t\right) = \frac{16}{9}t^2 \cdot \frac{2}{3}t = \frac{32}{27}t^3$$

Damit sind die folgenden zwei Zusammenhänge bekannt:

(1) $x = -\frac{4}{3}t$

(2) $y = \frac{32}{27}t^3$

aus (1) folgt: $t = -\frac{3}{4}x$

in (2) einsetzen: $y = \frac{32}{27} \cdot \left(-\frac{3}{4}x\right)^3 = \frac{32}{27} \cdot \left(-\frac{27}{64}\right)x^3 = -\frac{32}{64}x^3 = -\frac{1}{2}x^3$

Damit heißt die Ortslinie zu dem Schaubild K_f auf der alle Extrempunkte liegen: $y = -\frac{1}{2}x^3$.