Aufgabe 1 :

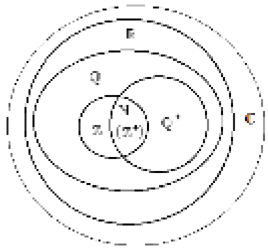
Erläutere die Begriff „Zahlbereichserweiterung“ anhand zweier Aufgabenbeispiele.

a) Notwendigkeit der Einführung gebrochener Zahlen

b) Notwendigkeit der Einführung komplexer Zahlen

c) Zeichne ein Mengendiagramm für alle Zahlbereiche: N, Z, Q^+, Q, R und C.

Lösung (Quelle: http://www.mathepedia.de/Zahlenbereiche.aspx ohne exotische Zahlen und http://tiburski.de/cybernautenshop/virtuelle_schule/dfu/rationale_zahlen/rationale_zahlen_I.htm)



a) 3x = 7 (nur Beispiel, Erläuterung ist etwas mehr)

b) $x^2 = -5$

c) Grafik rechts

Aufgabe 2:

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 5 + 2i$ und $z_2 = 2 - 7i$

a) Berechne die Summe und die Differenz und die Beträge der beiden Zahlen.

b) Veranschauliche die die Zahlen und die Berechnung von Summe und Differenz in der Zahlenebene.

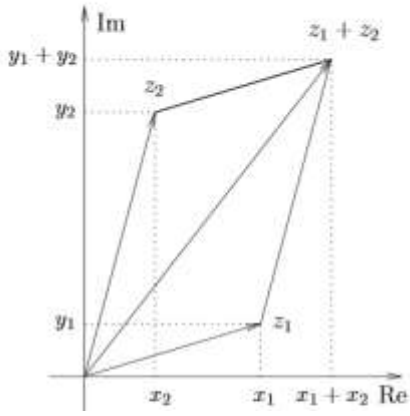
Lösung (Quelle: http://www2.hs-esslingen.de/~ulmet/mathe/vorlesungen/komplex.pdf)

Addition, Subtraktion

Die Addition und Subtraktion zweier komplexer Zahlen in arithmetischer Form erfolgt komponentenweise.

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + jy_1) \pm (x_2 + jy_2) = (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2)$$

Geometrische Veranschaulichung: Die Addition von komplexen Zahlen erfolgt analog zur Addition von Vektoren.



Weitere Lösungswege im Heft.

c) Berechne auch Produkt und Quotient der beiden Zahlen.

Lösung:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Bei der Division erweist sich ein Erweitern mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners („Nenner reell machen“) als hilfreich:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + jy_1)}{(x_2 + jy_2)} = \frac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2)(x_2 - jy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + j(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

b) Darstellung in Polarkoordinaten

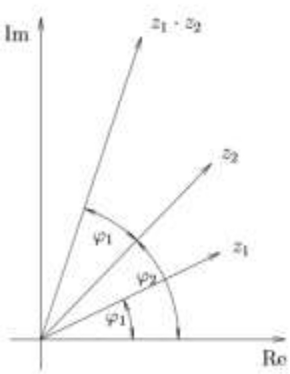
Sind zwei komplexe Zahlen z_1, z_2 gegeben durch ihre Polarkoordinaten r_1, φ_1, r_2, φ_2, so erhält man das Produkt und den Quotienten am einfachsten in Exponentialform (Potenzgesetze gelten auch für Potenzen mit imaginären Hochzahlen!).

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{j\varphi_1} \cdot r_2 e^{j\varphi_2} = r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Beträge multiplizieren, Argumente (Winkel) addieren

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{j\varphi_1}}{r_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Beträge dividieren, Argumente (Winkel) subtrahieren



c) Potenzen mit ganzen Hochzahlen

$z^k = (re^{j\varphi})^k = r^k \cdot e^{jk\varphi} = r^k \cdot (\cos\varphi + j\sin\varphi)^k = r^k \cdot (\cos k\varphi + j\sin k\varphi)\ ;\quad k \in \mathbb{Z}$

Beträge wie gewohnt potenzieren, Argumente (Winkel) mit dem Exponenten multiplizieren.

Betrag einer komplexen Zahl

$$|z| = |x + jy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$|z| = |r(\cos\varphi + j\sin\varphi)| = r$$
$$|z| = |r\,e^{j\varphi}| = r \qquad \text{insbesonders} \quad |e^{j\varphi}| = 1$$

Rechnen mit Beträgen

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|\ ; \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0)$$

$$\left.\begin{aligned} |z_1 \pm z_2| &\leq |z_1| + |z_2| \\ |z_1 \pm z_2| &\geq ||z_1| - |z_2|| \end{aligned}\right\} \quad \text{„Dreiecksungleichung"}$$

Aufgabe 3: Fülle die Tabelle aus

Komplexe Zahl z = a + bi	Komplexe Zahl $z = r \cdot e^{i\varphi}$	Betrag |z|	Argument φ
3i	$3 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$	3	$90° \triangleq \frac{\pi}{2}$
i	$e^{i\frac{\pi}{2}}$	1	$90° \triangleq \frac{\pi}{2}$

4 – 3i
 	
IV. Quadrant!!
	$5e^{i\cdot 323{,}13°} \triangleq 5e^{i\cdot 5{,}6397}$	$\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$	`tan⁻¹(3/4)`
			`36.86989765`
			`360-Ans`
			`323.1301024`
			`Ans*π/180`
			`5.639684198`
			
			323,13° ≙ 5,6397

$\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i$ I. Quadrant!!	$\frac{1}{2}e^{i\cdot 45°} \triangleq \frac{1}{2}e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}$	$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}$	$tan(\varphi) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$
$\sqrt{3}(\cos(135°) + i \cdot \sin(135°))$ $= -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$	$\sqrt{3} \cdot e^{i\cdot 135°} \triangleq \sqrt{3} \cdot e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{3\pi}{4} \triangleq 135°$ II. Quadrant !!

Aufgabe 4:

Löse die Gleichung $x^4 = -3 + 3\sqrt{3}i$ ohne Verwendung der speziellen Funktionen des GTR für komplexe Zahlen. Lösungsweg ausführlich darstellen.

$$\left|-3 + 3\sqrt{3}i\right| = \sqrt{9 + 27} = 6$$

$\varphi' = arctan\left(\frac{3\sqrt{3}}{3}\right) = arctan\left(\sqrt{3}\right) = 60°$ Achtung! II. Quadrant → $\varphi = 120° \triangleq \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{6}$ (Weil man nachher durch 4 teilen muss ☺)

$$-3 + 3\sqrt{3}i = 6 \cdot e^{i\cdot 120°} \triangleq 6 \cdot e^{i\cdot\frac{4\pi}{6}} = x^4$$

Das heißt, es gibt vier Lösungen, die im Abstand von 360°/4 = 90° $\triangleq \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{6}$ auf einem Kreis mit r = $\sqrt[4]{6}$ und Mittelpunkt (0/0) in der Zahlenebene liegen

$$6 \cdot e^{i\cdot\frac{4\pi}{6}} = x^4 \rightarrow x_1 = \left(6 \cdot e^{i\cdot\frac{4\pi}{6}}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{6} \cdot e^{i\cdot\frac{1\pi}{6}} \rightarrow \qquad x_2 = \sqrt[4]{6} \cdot e^{i\cdot\frac{4\pi}{6}}$$

$$x_3 = \sqrt[4]{6} \cdot e^{i\cdot\frac{7\pi}{6}} \qquad x_4 = \sqrt[4]{6} \cdot e^{i\cdot\frac{10\pi}{6}}$$

Probe (Nicht verlangt)

```
Normal Sci Eng
Float 0123456789
        Degree
Func Par Pol Seq
Connected Dot
Sequential Simul
Real a+bi re^θi
Full Horiz G-T
```

am Beispiel x_1 und x_2

```
         2.094395102
(6^.25*e^(1/6*π*
i))^4
6e^(2.094395102…
(6^.25*e^(4/6*π*
i))^4
6e^(2.094395102…
```

am Beispiel x_3 und x_4

```
6e^(2.094395102…
(6^.25*e^(7/6*π*
i))^4
6e^(2.094395102…
(6^.25*e^(10/6*π
*i))^4
6e^(2.094395102…
```

Bei DEGREE muss man φ trotzdem im Bogenmaß eingeben → Lösung in °

```
(6^.25*e^(210*i)
)^4
6e^(-111.545209…
(6^.25*e^(7/6π*i
))^4
        6e^(120i)
```