Lösung20120105L2-2

GK89-2.2 nur a) und b) ohne Kugel

a) Dreieck ABC gleichschenklig:

Seitenlängen $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-3 \\ 4-0 \\ -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0+16+16} = 4\sqrt{2}$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1-3 \\ 2-4 \\ -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{16+4+4} = 2\sqrt{6}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1-3 \\ 2-0 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16+4+4} = 2\sqrt{6}$

Wegen $\overline{AC} = \overline{BC}$ ist das Dreieck ABC gleichschenklig mit der Basis AB.

Gerade s: Da s Symmetrieachse des Dreiecks ABC ist, geht s durch die Spitze C des gleichschenkligen Dreiecks und den Mittelpunkt M der Basis AB.

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3+3 \\ 0+4 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; M (3|2|-1)

s: $\mathfrak{x} = \overrightarrow{OC} + t^* \cdot \overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t^* \begin{pmatrix} 3+1 \\ 2-2 \\ -1+1 \end{pmatrix}$; s: $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$t \in \mathbb{R}$

U auf s: $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $t = 3$, d.h. für $t = 3$ erhält man aus der Geradengleichung U, also: $U \in s$

Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{MC}| = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{16} = 8\sqrt{2}$: Flächeninhalt des Dreiecks ABC $A = 8\sqrt{2}$

b) Koordinatengleichung von E: Parameterdarstellung von E: $\mathfrak{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AC}$

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} ; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

λ, μ eliminieren aus:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \qquad\quad -4\mu \\ x_2 &= \quad 4\lambda + 2\mu \\ x_3 &= 1 - 4\lambda - 2\mu \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \left.\mu = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x_1\right\} \lambda = -\frac{3}{8} + \frac{1}{8}x_1 + \dots$$

λ, μ in die letzte Gleichung einsetzen: $x_3 = 1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_1 - x_2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_1$

Koordinatengleichung von E: $x_2 + x_3 - 1 = 0$

Hinweis: Dieses Ergebnis gewinnt man sofort durch Addition der beiden letzten Gleichungen.
Alternative Lösungswege sind in der Lösung 1989/II.1b für einen analogen Fall durchgerechnet.

Abstand d (S; E): HNF von E: $\frac{x_2 + x_3 - 1}{\sqrt{2}} = 0$

$$d(S;\,E) = \left| \frac{4+1-1}{\sqrt{2}} \right| = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = d(S;\,E)$$

Volumen der Pyramide: $V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 8\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{32}{3} = V$

(Beachte: G = A = Flächeninhalt des Dreiecks ABC; h = d (S; E))

Gleichung von g: Richtungsvektor von g = Normalenvektor von E, da $g \perp E$

g: $\mathfrak{x} = \overrightarrow{OS} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\sigma \in \mathbb{R}$

Lotfußpunkt L: L ist Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E, also

$g \cap E$: $(4+\sigma) + (1+\sigma) - 1 = 0$; $\sigma = -2$

L (2|2|-1) = U