# Lösung GK89-2.1

a) Punkt D: Wegen $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ gilt: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3-3 \\ 3-3 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{D(-3|-3|0)}$

Windschiefe Geraden: Gerade AB: $\mathfrak{x} = \overrightarrow{OA} + s^* \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s^* \begin{pmatrix} 3-3 \\ 3+3 \\ 0-0 \end{pmatrix}$

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad s \in \mathbb{R}$$

Gerade SC: $\mathfrak{x} = \overrightarrow{OS} + t\,\overrightarrow{SC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3-0 \\ 3-0 \\ 0-4 \end{pmatrix}$

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R}$$

Da $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq k \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ für alle $k \in \mathbb{R}$ gilt, sind die Richtungsvektoren der Geraden linear unabhängig, d.h. die Geraden AB und SC sind <u>nicht parallel.</u> (1)

AB ∩ SC:

$$\left.\begin{array}{rcll} 3 & = & -3t & \rightarrow\ t = -1 \\ -3+s & = & 3t & \end{array}\right\} \rightarrow s = 0$$

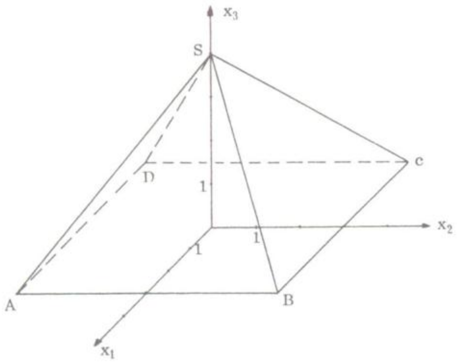
$$0 = 4 - 4t \quad \rightarrow\ t = 1 \qquad \text{Widerspruch, d.h.}$$

das Gleichungssystem ist nicht lösbar. Also haben AB und SC <u>keinen Punkt gemeinsam.</u> (2)

Aus (1) und (2) folgt: Die Geraden AB und SC sind <u>windschief.</u>

<u>oder:</u>
Die Geraden AB und SC sind windschief, da die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{SC}$ und $\overrightarrow{AS}$ linear unabhängig sind.

Zeichnung:



b) Koordinatengleichung von $E_1$:

Parametergleichung: $E_1$: $\mathfrak{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AS}$

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3-3 \\ 3+3 \\ 0+0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0-3 \\ 0+3 \\ 4-0 \end{pmatrix}$$

$$E_1: \quad \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

λ, μ eliminieren:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 & = & 3 \qquad\quad - 3\mu \\ x_2 & = & -3 + 6\lambda + 3\mu \end{array}\right\} + \quad x_1 + x_2 = 6\lambda$$

$$x_3 = 4\mu \qquad\qquad x_3 = 4\mu$$

λ, μ in mittlere Gleichung: $x_2 = -3 + (x_1 + x_2) + \frac{3}{4}x_3 \ /\cdot 4$

$$\underline{E_1: \quad 4x_1 + 3x_3 - 12 = 0}$$

oder:

Ansatz: $a x_1 + b x_2 + c x_3 + d = 0$

$$\begin{array}{lll} A: & \left.\begin{array}{l} 3a - 3b \quad + d = 0 \\ 3a + 3b \quad + d = 0 \end{array}\right\} & \begin{array}{l} + \quad a = -\frac{1}{3} d \\ - \quad 6b = 0;\ b = 0 \end{array} \\ S: & \qquad 4c + d = 0 & \rightarrow \quad c = -\frac{1}{4} d \end{array}$$

Wähle $d = -12$: $a = 4;\ b = 0;\ c = 3$

$E_1$: $4 x_1 + 3 x_3 - 12 = 0$

oder:

Normalengleichung von $E_1$: $\mathfrak{n}$ mit $\mathfrak{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \mathfrak{n} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und

$$\mathfrak{n} \cdot \overrightarrow{AS} = \mathfrak{n} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} 6 n_2 \qquad\quad = 0 \quad \rightarrow \quad n_2 = 0 \\ -3 n_1 + 3 n_2 + 4 n_2 = 0 \qquad\qquad\qquad \end{array}\right\} \; 3 n_1 = 4 n_3$$

Wähle $n_3 = 3$: $n_1 = 4;\ n_2 = 0$

$$\mathfrak{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$E_1: \ \mathfrak{n} \cdot (\mathfrak{x} - \overrightarrow{OA}) = 0; \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \left[ \mathfrak{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$E_1$: $4 x_1 + 3 x_3 - 12 = 0$

Koordinatengleichung von $E_2$: $a x_1 + b x_2 + c x_3 + d = 0$

$$\begin{array}{lll} B: & \left.\begin{array}{l} 3a + 3b \quad + d = 0 \\ -3a + 3b \quad + d = 0 \end{array}\right\} & \begin{array}{l} + 6b + 2d = 0; \quad b = -\frac{1}{3} d \\ - 6a = 0; \quad a = 0 \end{array} \\ S: & \qquad 4c + d = 0 & \rightarrow \quad c = -\frac{1}{4} d \end{array}$$

Wähle $d = -12$: $a = 0;\ b = 4;\ c = 3$

$\underline{E_2: \quad 4 x_2 + 3 x_3 - 12 = 0}$

Hinweis: Die gesuchte Gleichung kann natürlich auch auf den bei $E_1$ gezeigten Wegen gefunden werden.
Am schnellsten gewinnt man die Gleichung von $E_2$ wohl aus der Gleichung von $E_1$ durch Austausch der Variablen $x_1$ und $x_2$. Dies läßt sich mit einer Drehung um die $x_3$-Achse erklären und begründen.

Schnittwinkel $\alpha$: $\alpha = \measuredangle (E_1;\ E_2)$

$$\cos \alpha = \frac{\mathfrak{n}_1 \cdot \mathfrak{n}_2}{|\mathfrak{n}_1| \cdot |\mathfrak{n}_2|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{25}} = \frac{9}{25} = 0{,}36; \qquad \alpha \approx 68{,}9^0$$

Koordinatengleichung von $E^*$: Da $E^*$ senkrecht auf $E_1$ und $E_2$ steht, muß dies auch für die entsprechenden Normalenvektoren gelten.

Also: $\mathfrak{n}^* \cdot \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}^* \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \wedge \mathfrak{n}^* \cdot \mathfrak{n}_2 = \mathfrak{n}^* \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{array}{l} 4 n_1^* \qquad\quad + 3 n_3^* = 0 \quad \rightarrow \quad n_1^* = -\frac{3}{4} n_3^* \\ \qquad\quad 4 n_2^* + 3 n_3^* = 0 \quad \rightarrow \quad n_2^* = -\frac{3}{4} n_3^* \end{array}$$

. Wähle $n_3^* = -4$.

$$\mathfrak{n}^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Wegen $O \in E^*$ folgt sofort: $\underline{E^*: \ 3 x_1 + 3 x_2 - 4 x_3 = 0}$

oder: Aus $E^* \perp E_1$; $E^* \perp E_2$ und $E_1 \cap E_2 = SB$ folgt:

$E^* \perp SB$. Daraus: $\mathfrak{n}^* = \overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$; $O \in E^*$ ...