Lösung GK88-2.2

a) Koordinatengleichung von E: 1. Möglichkeit: Parametergleichung

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-3\\3\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3+3\\2-3\\2-4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}6+3\\4-3\\-4-4\end{pmatrix}$$

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\3\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}6\\-1\\-2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}9\\1\\-8\end{pmatrix};\quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$$

λ, μ eliminieren:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -3 + 6\lambda + 9\mu \\ x_2 &= 3 - \lambda + \mu \quad |\cdot(-2) \\ x_3 &= 4 - 2\lambda - 8\mu \end{aligned}\right\} +$$

$-2x_2 + x_3 = -2 - 10\mu$; $\quad \mu = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5}x_2 - \frac{1}{10}x_3$

μ in mittlere Gleichung: $\quad \lambda = \frac{14}{5} - \frac{4}{5}x_2 - \frac{1}{10}x_3$

λ, μ in erste Gleichung: $\quad x_1 = -3 + \frac{84}{5} - \frac{24}{5}x_2 - \frac{3}{5}x_3 - \frac{9}{5} + \frac{9}{5}x_2 - \frac{9}{10}x$

$\underline{E:\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 24 = 0}$

oder:

$\vec{n}$ mit $\vec{n}\cdot\begin{pmatrix}6\\-1\\-2\end{pmatrix} = 0$ und $\vec{n}\cdot\begin{pmatrix}9\\1\\-8\end{pmatrix} = 0$ bestimmen:

$$\left.\begin{aligned} 6n_1 - n_2 - 2n_3 &= 0 \\ 9n_1 + n_2 - 8n_3 &= 0 \end{aligned}\right\} +$$

$15n_1 - 10n_3 = 0$; $\quad n_3 = \frac{3}{2}n_1$ in erste Gleichung: $n_2 = 3n_1$

Wähle $n_1 = 2$:

$$E:\quad 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 - \underbrace{\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\3\\4\end{pmatrix}}_{24} = 0$$

2. Möglichkeit: Ansatz $ax_1 + 6x_2 + cx_3 + d = 0$

A: $-3a + 3b + 4c + d = 0$ (1)
B: $3a + 2b + 2c + d = 0$ (2)
C: $6a + 4b - 4c + d = 0$ (3)

$$\left.\begin{aligned} &2(2) - (3): && 8c + d = 0;\ d = -8c \\ &(1) + (2): && 5b + 6c + 2d = 0 \end{aligned}\right\}\ b = 2c$$

d, b in (2): $\quad a = \frac{2}{3}c$. Wähle $c = 3$.

E: $2x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 24 = 0 \quad (*)$

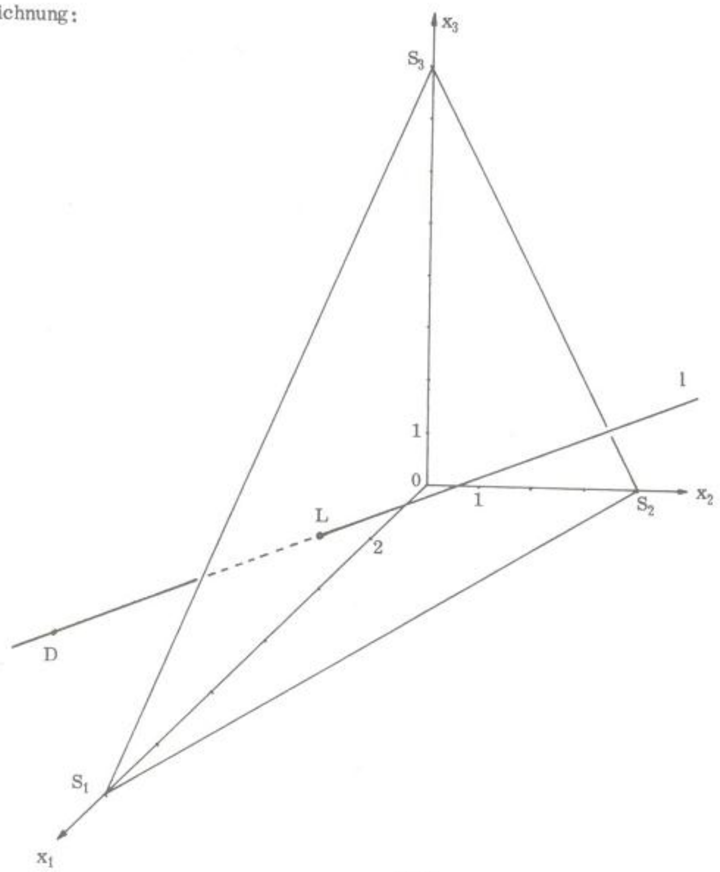
Schnittpunkte:

x_1-Achse ($x_2 = x_3 = 0$) in $(*)$: $\quad 2x_1 - 24 = 0$; $\quad S_1(12\,|\,0\,|\,0)$

x_2-Achse ($x_1 = x_3 = 0$) in $(*)$: $\quad 6x_2 - 24 = 0$; $\quad S_2(0\,|\,4\,|\,0)$

x_3-Achse ($x_1 = x_2 = 0$) in $(*)$: $\quad 3x_3 - 24 = 0$; $\quad S_3(0\,|\,0\,|\,8)$

Zeichnung:



b) Abstand $d(D;\ E)$: HNF von E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $|\vec{n}| = 7$

$$E: \quad \frac{2x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 24}{7} = 0$$

$$d(D;\ E) = \left| \frac{2 \cdot 4 + 6 \cdot (-5) + 3 \cdot (-1) - 24}{7} \right| = \underline{7 = d(D;\ E)}$$

Lotfußpunkt L: Lotgerade l von D auf E: $l:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

$l \cap E = \{L\}$: $2(4+2r) + 6(-5+6r) + 3(-1+3r) - 24 = 0$

$49r - 49 = 0$; $r = 1$ $\qquad \underline{L(6\,|\,1\,|\,2)}$

oder:

$$\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OD} + d(D;\ E) \cdot \vec{n}^{\,0} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + 7 \cdot \tfrac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Berechnet man zuerst L, so kann damit $d(D;\ E)$ als $|\overrightarrow{DL}|$ ermittelt werden.

Zeichnung: siehe Teilaufgabe a)

P auf E: Die Koordinaten von P erfüllen die Gleichung von E, denn $2 \cdot 6 + 6 \cdot 2 + 3 \cdot 0 - 24 = 0$ ist wahr; also $\underline{P \in E}$

Schnittwinkel α: $\alpha = \sphericalangle(DP;\ E)$; $\overrightarrow{DP} = \begin{pmatrix} 6-4 \\ 2+5 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\sin\alpha = \frac{\overrightarrow{DP} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{DP}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{4 + 42 + 3}{\sqrt{54} \cdot 7} = \frac{7}{3\sqrt{6}} \approx 0{,}9526$$

$$\alpha \approx \underline{72{,}3^0}$$