Lösung GK88-2.1

Achtung! Für die Koordinatengleichung kennt Ihr einen besseren Weg → Kreuzprodukt

„Elimination" im Hinweis heißt: Entparametrisierung.

a) Punkt A auf g: $\begin{pmatrix}3\\8\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\6\\2\end{pmatrix} \Rightarrow t = 1$: $\underline{A \in g}$

Schnittpunkt S_1: $g \cap E_1 = \{S_1\}$

Vektorgleichung von g in Normalengleichung von E_1 einsetzen:

$$5(2+t) + 4(2+6t) + 3(-1+2t) + 20 = 0$$

$$35t + 35 = 0; \quad t = -1$$

$t = -1$ in Gleichung von g einsetzen: $\underline{S_1(1|-4|-3)}$

Schnittwinkel φ: $\varphi = \sphericalangle(g; E_1)$

Dieses Zeichen bedeutet: $\vec{n}$

$$\sin\varphi = \frac{\vec{n}\cdot\vec{u}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{u}|}; \quad \vec{n} = \begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix} \text{ Normalenvektor von } E_1$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\6\\2\end{pmatrix} \text{ Richtungsvektor von g}$$

$$\sin\varphi = \frac{5+24+6}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{41}} = \frac{35}{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{41}} = \frac{7}{\sqrt{82}} \approx 0{,}7730;$$

$$\underline{\varphi \approx 50{,}6^0}$$

Ebene E_2: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AD}$

Dieses Zeichen bedeutet: $\vec{x}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\8\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3-3\\5-8\\5-1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}8-3\\4-8\\-2-1\end{pmatrix}$$

Parametergleichung von E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\8\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\-3\\4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}5\\-4\\-3\end{pmatrix}; \lambda,\mu \in \mathbb{R}$

oder:

E_2: $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$

(1) A: $3a + 8b + c + d = 0$
(2) B: $3a + 5b + 5c + d = 0$
(3) D: $8a + 4b - 2c + d = 0$

(1) − (2): $3b - 4c = 0$; $c = \frac{3}{4}b$
(3) − (1): $5a - 4b - 3c = 0$
$\Rightarrow a = \frac{5}{4}b$

a, c in (1): $d = -\frac{25}{2}b$. Wähle $b = 4$.

Normalengleichung von E_2: $5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 50 = 0$

Hinweis: Diese Normalgleichung erhält man auch aus der obigen Parametergleichung von E_2 durch Elimination von λ und μ.

Je nachdem, in welcher Form E_2 vorliegt, weist man nun die Parallelität von E_1 und E_2 nach.

Parallelität von E_1 und E_2: 1. Möglichkeit: E_1 und E_2 sind parallel, da ihre Normalenvektoren linear abhängig (im vorliegenden Fall sogar gleich) sind.

b) Punkt C: ABCD ist ein Parallelogramm, wenn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (Umlaufsinn beachten) gilt:

$$\begin{pmatrix} 3-3 \\ 5-8 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - 8 \\ c_2 - 4 \\ c_3 + 2 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - 8 \\ c_2 - 4 \\ c_3 + 2 \end{pmatrix}$$

$\underline{C\,(8\,|\,1\,|\,2)}$

<u>oder:</u>

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}; \quad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 3-3+8 \\ 5-8+4 \\ 5-1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Flächeninhalt: Wegen $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$ gilt: $AB \perp AD$, d.h.

das Viereck ABCD ist ein Rechteck.

$$A = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| = 5 \cdot 5\sqrt{2} = 25\sqrt{2}$$

Bemerkung: Wird das Viereck ABCD nicht als Rechteck erkannt, so muß der Flächeninhalt wie folgt berechnet werden:
$d = d(D;\ AB)$ (Abstand des Punktes D von der Geraden AB - Hilfsebene, usw. berechnen)
$A = |\overrightarrow{AB}| \cdot d$

Schnittpunkt der Diagonalen: Da sich in jedem Parallelogramm die Diagonalen halbieren, ergibt sich der Diagonalenschnittpunkt als Mitte von AC bzw. BD:

$$\overrightarrow{OM} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \underline{M\left(\tfrac{11}{2}\,\middle|\,\tfrac{9}{2}\,\middle|\,\tfrac{3}{2}\right)}$$

Bemerkung: Wird der Diagonalenschnittpunkt nicht als Mitte erkannt, so sind die entsprechenden Geraden zu schneiden.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8-3 \\ 1-8 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8-3 \\ 4-5 \\ -2-5 \end{pmatrix}$$

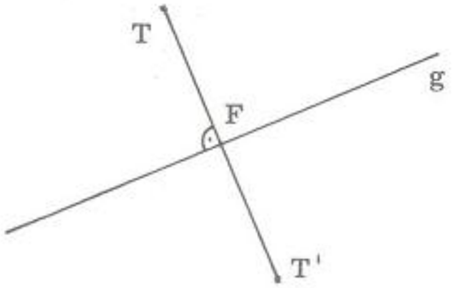
$\lambda = \mu = \frac{1}{2}$; daraus $M\left(\frac{11}{2}\,\middle|\,\frac{9}{2}\,\middle|\,\frac{3}{2}\right)$

Schnittwinkel α: $\alpha = \sphericalangle(AC;\ BD)$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|} = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}}{\sqrt{75} \cdot \sqrt{75}} = \frac{25 + 7 - 7}{75} = \frac{1}{3}$$

$\underline{\alpha \approx 70{,}5^0}$

c) Spiegelpunkt T': Skizze:



$F \in g$, d.h. $F\,(2 + t \mid 2 + 6t \mid -1 + 2t)$

$\overrightarrow{TF} \perp g$, d.h. $\begin{pmatrix} 2 + t - 5 \\ 2 + 6t - 6 \\ -1 + 2t - 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

$$t - 3 + 6\,(6t - 4) + 2\,(2t - 7) = 0$$

$t = 1$: $F\,(3 \mid 8 \mid 1)$

$$\overrightarrow{OT'} = \overrightarrow{OT} + 2 \cdot \overrightarrow{TF} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 - 5 \\ 8 - 6 \\ 1 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$\underline{T'\,(1 \mid 10 \mid -4)}$